# Региональный этап
# Всероссийской олимпиады школьников
# по экономике

23 января 2016 года

## Второй тур. Задачи. **Решения.**

Продолжительность работы — **140 минут**.

Максимальное количество баллов за задачи — **120**.
Каждая задача оценивается из **30 баллов**.

**Уважаемые коллеги!**

В этом документе вы найдете решения задач регионального этапа всероссийской олимпиады школьников по экономике 2016 года. Мы надеемся, что сами задания, а также процесс их проверки доставят вам удовольствие.

Хотелось бы напомнить, что при проверке задач нужно придерживаться схем, разработанных Центральной предметно-методической комиссией (ЦПМК) по экономике, а также «Требований к проведению регионального этапа по экономике в 2015/2016 учебном году» (раздел «Проверка»). Общие принципы проверки приведены в «Требованиях...» и в списке ниже:

1. Решение каждой задачи оценивается Жюри в соответствии с схемой проверки, разработанной Центральной предметно-методической комиссией. Полный балл за задачу получают участники, чьи решения являются строгими и полными. Неполные и частично правильные решения оцениваются неполными баллами.
2. Жюри проверяет работы с полной беспристрастностью и направляет все усилия на то, чтобы результаты Олимпиады были справедливыми.
3. Жюри оценивает только то, что написано в работе участника: не могут быть оценены комментарии и дополнения, которые участник может сделать после окончания тура (например, в апелляционном заявлении).
4. Фрагменты решения участника, зачеркнутые им в работе, не проверяются Жюри. Если участник хочет отменить зачеркивание, он должен явно написать в работе, что желает, чтобы зачеркнутая часть была проверена.
5. Участник должен излагать свое решение понятным языком, текст должен быть написан разборчивым почерком. При этом жюри не снижает оценку за помарки, исправления, орфографические, пунктуационные и стилистические ошибки, недостатки в оформлении работы, если решение участника можно понять.
6. Все утверждения, содержащиеся в решении участника, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений участника. Участник может не доказывать общеизвестные утверждения. Вопрос определения общеизвестности находится в компетенции Жюри, но в любом случае общеизвестными считаются факты,

изучаемые в рамках школьной программы. Также, как правило, общеизвестными можно считать те факты, которые многократно использовались в олимпиадах прошлых лет и приводились без доказательств в официальных решениях. Все необщеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Решение, которое явно или скрыто опирается на не доказанные участником необщеизвестные факты, оценивается неполным баллом.

7. Если в решении участника содержатся противоречащие друг другу суждения, то они, как правило, не оцениваются, даже если одно из них верное. Нарушение логических последовательностей (причинно-следственных связей), как правило, приводит к существенному снижению оценки.
8. Если задача состоит из нескольких пунктов, то участник должен четко обозначить, где начинается решение каждого пункта. Каждый фрагмент решения проверяется в соответствии с критериями проверки, разработанными для указанного участником пункта. Если в решении участника одного из пунктов задачи содержится фрагмент решения, который в соответствии со схемой оценивания может принести баллы за другой пункт задачи, жюри может не ставить эти баллы, если из решения неочевидно, что участник понимает применимость результатов к другому пункту. При решении пунктов задачи участник может ссылаться на собственные решения (ответы) других пунктов или на общую часть решения, выписанную в начале.
9. Участник может решать задачи любым корректным способом, Жюри не повышает баллы за красоту и лаконичность решения, а равно не снижает их за использование нерационального способа. Корректным может быть решение, которое нестандартно и отличается по способу от авторского (приведенного в материалах ЦПМК). В работе участника должно содержаться доказательство полноты и правильности его ответа, при этом способ получения ответа, если это не требуется для доказательства его полноты и правильности, излагать необязательно.
10. Работа участника не должна оставлять сомнений в том, каким способом проводится решение задачи. Если участник излагает несколько решений задачи, которые являются разными по сути (и, возможно, приводят к разным ответам), и некоторые из решений являются некорректными, то Жюри не обязано выбирать и проверять корректное решение.
11. Штрафы, которые Жюри присваивает за вычислительные ошибки, зависят от серьезности последствий этих ошибок. Вычислительная ошибка, которая не привела к существенному изменению дальнейшего решения задачи и качественно не изменила сути получаемых выводов, штрафуется меньшим числом баллов, чем вычислительная ошибка, существенно повлиявшая на дальнейшее решение.
12. Если ошибка была допущена в первых пунктах задачи и это изменило ответы участника в последующих пунктах, то в общем случае баллы за следующие пункты не снижаются, то есть они проверяются так, как если бы собственные результаты, которыми пользуется участник, были правильными. Исключением являются случаи, когда ошибки в первых пунктах упростили или качественно

исказили логику дальнейшего решения и/или ответы — в этих случаях баллы за последующие пункты могут быть существенно снижены.

13. Если участник в своем решении опирается на метод перебора вариантов, то для полного балла должны быть разобраны все возможные случаи. Упущение хотя бы одного случая может привести к существенному снижению оценки (непропорциональному доле неразобранных случаев в общем их числе).
14. Если для решения участнику необходимы дополнительные предпосылки, то он должен их сформулировать. Дополнительные предпосылки при этом не должны менять смысл задачи и существенно сужать круг обсуждаемых в решении ситуаций по сравнению с тем, который задан в условии.

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Они содержат пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики или подготовке к олимпиадам. От участников не нужно требовать слишком подробного решения — в любом случае руководствуйтесь здравым смыслом и старайтесь определить, действительно ли участник понимает, как решается задача.

При этом помните, что приведенные ниже схемы проверки и обозначенные выше принципы будут применяться сегодня во всех регионах; для сопоставимости результатов необходимо следовать им максимально четко. В случае если решение участника не укладывается в предложенную схему проверки, примите решение исходя из своего опыта и справедливости. В особо спорных случаях вы можете спросить совета у коллег из других регионов или у ЦПМК на странице
http://iloveeconomics.ru/olimp/region/grading. Если ЦПМК посчитает нужным прояснить какие-либо аспекты авторских решений или схем проверки, она сделает это в день проведения этапа на той же странице, поэтому членам жюри из всех регионов рекомендуется следить за содержанием этой страницы при проверке работ.

Если вам потребуется неотложная консультация в день проведения регионального этапа, вы можете написать ЦПМК по экономике напрямую:
region@iloveeconomics.ru.

Удачи!

ЦПМК по экономике, 2016 год

## Задача 1. «Полдники» *(30 баллов)*

Любимыми лакомствами жителей стран Кабаджленд и Бэриленд являются пирожки с капустой ($P$) и смородиновый морс ($M$). Эти блага потребляются в неизменной пропорции 1 пирожок на 1 стакан морса. Комплект, состоящий из одного пирожка и одного стакана морса, назовем *полдником.*

В любой стране для приготовления 1 пирожка необходимы 2 единицы муки ($x$) и 1 единица капусты ($y$), для приготовления стакана морса нужна только 1 единица смородины ($z$). Уравнения, описывающие кривые производственных возможностей относительно ресурсов, представлены в таблице. Найдите максимальное общее количество полдников, которое можно приготовить в двух странах, если:

| Страна | Уравнение КПВ |
|---|---|
| Кабаджленд | $x_к + y_к + z_к = 120$ |
| Бэриленд | $x_б + 2y_б + z_б = 120$ |

**а)** *(7 баллов)* обмен между странами невозможен;

**б)** *(8 баллов)* страны могут обмениваться пирожками и морсом;

**в)** *(15 баллов)* страны могут обмениваться пирожками, морсом и капустой.

### *Решение.*

**а)** Обозначим за $P_к$ и $M_к$ объемы производства пирожков и морса в Кабаджленде. Из условия следует, что $x_к = 2P_к$, $y_к = P_к$, $z_к = M_к$. Подставляя эти соотношения в уравнение КПВ, получаем, что $3P_к + M_к = 120$ (Это не что иное, как уравнение КПВ Кабаджленда относительно товаров.) Второе уравнение на $P_к$ и $M_к$ получаем из условия о том, что полдник должен состоять из одного пирожка и одного стакана морса: $P_к = M_к$. Решая получившуюся систему, получаем, что $P_к = M_к = 30$.

2 балла за уравнение КПВ Кабаджленда относительно товаров

1 балл за нахождение количества полдников в Кабаджленде

Аналогично, $P_б$ и $M_б$ — объемы производства пирожков и морса в Бэриленде. Снова имеем соотношения $x_б = 2P_б$, $y_к = P_б$, $z_б = M_б$, откуда получаем, что $4P_б + M_б = 120$. Вновь учитывая, что $P_б = M_б$, получаем, что $P_б = M_б = 24$.

2 балла за уравнение КПВ Бэриленда относительно товаров

1 балл за нахождение количества полдников в Бэриленде

Таким образом, максимальный мировой объем потребления полдников равен $30 + 24 = 54$ полдника.

1 балл за нахождение суммарного объема потребления

**Примечание**. Участник может не выводить КПВ относительно товаров, а сразу перейти к уравнениям, учитывающим пропорции необходимых ресурсов: например, $2z_к + z_к + z_к = 120$ и $2z_б + 2z_б + z_б = 120$. При корректном обосновании этого способа действия баллы не должны снижаться.

Графическое решение (включающее построение графиков КПВ) не является необходимым и дополнительные баллы за него не ставятся, если приведено аналитическое решение. При этом сами графики представлены на Рис. 1.1.

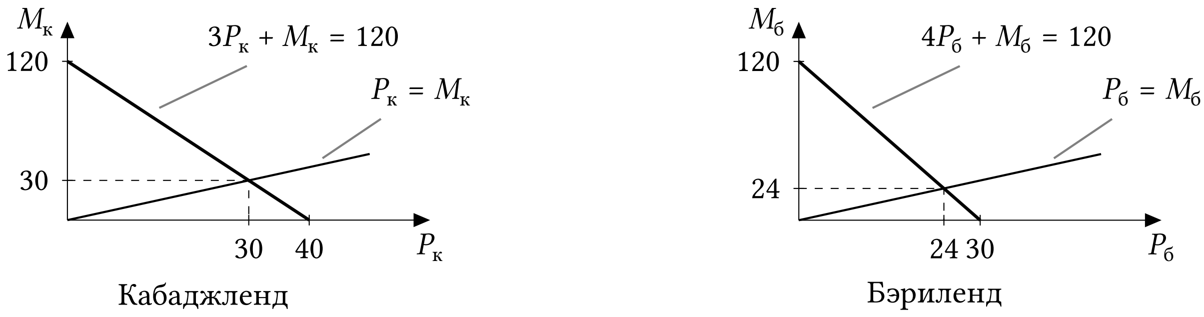


Рис. 1.1: Кривые производственных возможностей относительно товаров

**б)** В пункте **а)** мы вывели, что уравнения КПВ стран в координатах «пирожки-морс» имеют вид $3P_к + M_к = 120$ и $4P_б + M_б = 120$. Сложим эти КПВ стандартным образом:

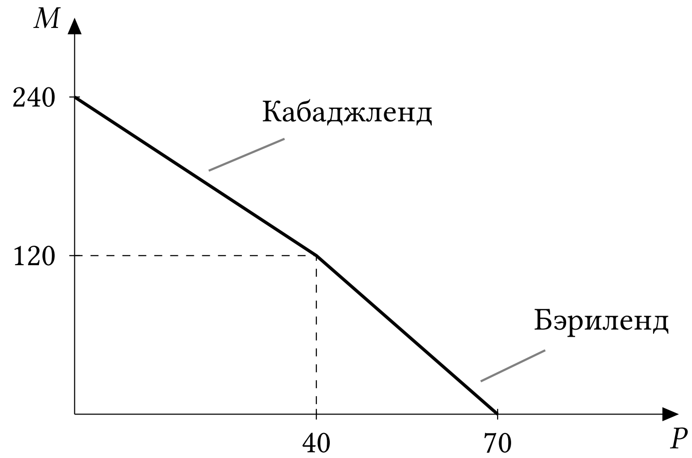


Рис. 1.2: Общая КПВ

5 баллов, если участник любым способом (аналитически или графически) демонстрирует, что может сложить эти КПВ.

Уравнение этой КПВ имеет вид:

$$M = \begin{cases} 240 - 3P, & \text{если } P < 40; \\ 280 - 4P, & \text{если } 40 \leqslant P \leqslant 70, \end{cases}$$

где $P$ и $M$ — мировые объемы производства пирожков и морса соответственно.

Теперь нам нужно пересечь график мировой КПВ с лучом $P = M$ (Рис. 1.3).

Заметим, что точка излома КПВ имеет координаты (40, 120), то есть в ней $M > P$. Следовательно, пересечение в КПВ произойдет на втором участке, то есть тогда, когда $M = 280 - 4P$. Получаем уравнение $M = 280 - 4M$, откуда $M = P = 56$.

3 балла за нахождение количества полдников (рисунок необязателен)

Таким образом, максимальный мировой объем потребления полдников теперь равен 56.

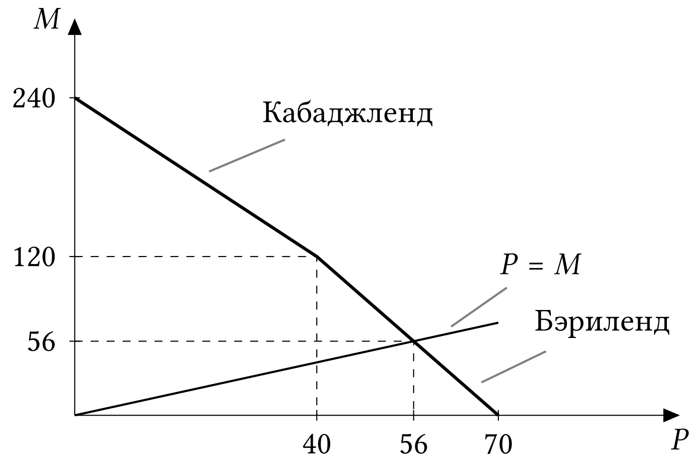


Рис. 1.3: Общая КПВ и полдники

Такое решение должно оцениваться полным баллом.

**Примечание**. Задача может быть решена и без получения уравнения суммарной КПВ. Воспользовавшись идеей о сравнительных преимуществах (альтернативная стоимость пирожка в Кабаджленде меньше, чем в Бэриленде), заметим, что первый пирожок должен быть произведен в Кабаджленде. Однако даже если мы произведем там все возможные пирожки (40 штук), морса в Бэриленде можно будет произвести большее количество (120 стаканов), значит, там тоже частично нужно производить пирожки. Производя $x$ дополнительных пирожков, мы отказываемся в Бэриленде от $4x$ стаканов морса. Чтобы в сумме не было лишних пирожков или морса, должно быть выполнено $40 + x = 120 - 4x$, то есть $x = 16$ и всего можно произвести 56 полдников.

**в)** Докажем, что максимальный мировой объем потребления полдников равен 60. Для этого: 1) докажем, что искомый объем потребления не больше 60 (оценка); 2) приведем пример обмена между странами, при котором искомый объем равен 60 (пример).

1) (Оценка) Выпишем снова уравнения КПВ стран относительно ресурсов:

$$\begin{cases} x_к + y_к + z_к = 120, \\ x_б + 2y_б + z_б = 120. \end{cases}$$

Сложим эти уравнения (просто как уравнения, а не в смысле сложения КПВ). Получаем

$$(x_к + x_б) + (y_к + y_б) + (z_к + z_б) = 240 - y_б.$$

Обозначим количество полдников за $Q$. Заметим, что, в силу пропорций производства и потребления верны следующие равенства: $2Q = x_к + x_б$, $Q = y_к + y_б$, $Q = z_к + z_б$. Подставляя эти равенства в уравнения выше, получаем, что

9 баллов за доказательство того, что $Q \leqslant 60$

$$2Q + Q + Q = 240 - y_б \leqslant 240.$$

Таким образом, $4Q \leqslant 240$, откуда $Q \leqslant 60$, что мы и хотели доказать.

2) (Пример) 60 полдников страны могут получить следующим образом:

6 баллов за пример

- Кабаджленд производит 60 единиц муки и 60 единиц капусты ($x_к = y_к = 60$);
- Бэриленд производит 60 единиц муки и 60 единиц смородины ($x_б = z_б = 60$).

В результате в двух странах оказывается 120 единиц муки, 60 единиц капусты и 60 единиц смородины — ресурсы, которых как раз хватит на 60 полдников. Поскольку ресурсы можно передавать из одной страны в другую, производство конечных товаров можно организовать в любой стране.

**Примечание 1**. Этот пример не единственен. Подойдет любой пример, в котором Кабаджленд производит 60 единиц капусты, а производство муки и смородины равно 120 и 60 единиц соответственно в сумме в двух странах.

**Примечание 2**. Построение примера является неотъемлемой частью решения. Из того, что выполнено неравенство $Q \leqslant 60$ еще не следует, что оно может быть выполнено как равество. Действительно, наше доказательство неравенства $Q \leqslant 60$ никак не учитывало возможности торговли, а потому это неравество могло быть абсолютно так же доказано и в пунктах а) и б). Тем не менее, как мы видим, в этих пунктах верхняя граница $Q = 60$ не достигается.

## Задача 2. «Упрощёнка» *(30 баллов)*

В современной России некоторые фирмы могут применять так называемую *упрощенную систему налогообложения*, при которой можно выбирать, какой налог — на выручку или на прибыль — платить.

Рассмотрим подобную систему в рамках простой модели. Представим себе фирму на рынке совершенной конкуренции, функция издержек которой описывается уравнением $TC = 0{,}5q^2 + 10q$, где $q$ — объем выпуска. Государство предлагает фирме на выбор два налога — налог в размере 10 % от выручки или в размере 36 % от прибыли (эти ставки отличаются от действующих в современной России). При каждой цене $P$ фирма решает, сколько единиц продукции произвести и какой из двух налогов платить. Фирма максимизирует прибыль.

Выведите уравнение функции предложения фирмы. Может ли в данном случае фирма при росте цены *снизить* выпуск? (Если да, то приведите пример, если нет, то обоснуйте.)

*Решение.* Найдем сначала оптимальный выпуск фирмы, если она выбрала определенный налог.

1) Налог на выручку. Фирма будет максимизировать

$$\pi_{\triangledown}(q) = (1 - 0{,}1)TR(q) - TC(q) = 0{,}9pq - 0{,}5q^2 - 10q.$$

4 балла за нахождение оптимального выпуска при выборе налога на выручку. Из них 1 балл снимается, если не проверено, что найден именно максимум (т. е. нет ссылки на то, что ветви вниз, $\pi'$ меняет знак с + на –, или $\pi''$ отрицательна).

Графиком функции прибыли является парабола с ветвями вниз, поэтому оптимальный выпуск находится в ее вершине, если абсцисса вершины неотрицательна, и равен нулю в противном случае: $q = 0{,}9p - 10$ при $p \geqslant 100/9$ и $q = 0$ при $p < 100/9$. Максимальная прибыль при этом составит

3 балла за нахождение максимальной прибыли при выборе налога на выручку. Если участник забыл про случай $p < 100/9$, снимается 1 балл.

$$\pi_{\triangledown}(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p < 100/9; \\ \dfrac{(0{,}9p - 10)^2}{2}, & \text{если } p \geqslant 100/9. \end{cases}$$

2) Налог на прибыль. Фирма будет максимизировать

$$\pi_{\vartriangle}(q) = (1 - 0{,}36)\left(TR(q) - TC(q)\right) = 0{,}64(pq - 0{,}5q^2 - 10q).$$

4 балла за нахождение оптимального выпуска при выборе налога на прибыль. Из них 1 балл снимается, если не проверено, что найден именно максимум (т. е. нет ссылки на то, что ветви вниз, $\pi'$ меняет знак с + на –, или $\pi''$ отрицательна).

Графиком функции прибыли вновь является парабола с ветвями вниз, поэтому оптимальный выпуск находится в ее вершине, если абсцисса вершины положительна, и равен нулю в противном случае: $q = p - 10$ при $p \geqslant 10$ и $q = 0$ при $p < 10$. Максимальная прибыль при этом составит

3 балла за нахождение максимальной прибыли при выборе налога на прибыль. Если участник забыл про случай $p < 10$, снимается 1 балл.

$$\pi_{\vartriangle}(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p < 10; \\ 0{,}64\dfrac{(p - 10)^2}{2}, & \text{если } p \geqslant 10. \end{cases}$$

3) Теперь найдем, при каких ценах выгоднее выбирать налог на выручку, а при каких — налог на прибыль. Выбирать налог на выручку выгоднее, если $\pi_\triangledown(p) > \pi_\vartriangle(p)$. Разобьем значения цены на интервалы в соответствии с полученными выше результатами:

- $p \leqslant 10$. В этом случае оптимальный выпуск при двух налогах совпадает и равен 0.

2 балла за разбор первого случая

- $10 < p \leqslant 100/9$. В этом случае $\pi_\vartriangle(p) > 0$, а $\pi_\triangledown(p) = 0$ — лучше выбирать налог на прибыль и производить $q = p - 10$.

2 балла за разбор второго случая

- $p > 100/9$. В этом случае налог на прибыль выгоднее, если

2 балла за формулировку этого неравенства

$$0{,}64\frac{(p-10)^2}{2} > \frac{(0{,}9p-10)^2}{2}.$$

Это неравенство легко решить, умножая обе части на 2 и извлекая квадратный корень (выражения в скобках положительны). Получаем $p < 20$ — условие, при котором налог на прибыль (и производить $q = p - 10$) выгоднее. При $p > 20$ выгоднее выбирать налог на выручку (и производить $q = 0{,}9p - 10$), при $p = 20$ варианты равнозначны.

2 балла за решение неравенства

В итоге, функция предложения фирмы будет описываться уравнением

4 балла за вывод итоговой функции предложения

$$q_s(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p < 10; \\ p - 10, & \text{если } 10 \leqslant p \leqslant 20; \\ 0{,}9p - 10, & \text{если } p \geqslant 20. \end{cases}$$

(При $p = 20$ оба выпуска ($p - 10$ и $0{,}9p - 10$) являются оптимальными.)

При росте цены фирма может снизить выпуск. Например, при росте цены с 19 до 21 фирме выгодно *снизить* выпуск с 9 до 8,9 единиц.

4 балла за правильный ответ и любой правильный пример

## Задача 3. «Закупка и налог» *(30 баллов)*

В стране Альфа производится и потребляется всего два товара: X и Z, которые продаются и покупаются на рынках совершенной конкуренции. В 2015 году на этих рынках функции спроса и предложения имели вид:

| | **Спрос** | **Предложение** |
|---|---|---|
| Товар X | $X_D = 10/P_X$ | $X_S = 10P_X$ |
| Товар Z | $Z_D = 40/P_Z$ | $Z_S = 10P_Z$ |

В 2016 году правительство страны Альфа планирует закупить 15 единиц товара X для своих нужд. Чтобы сохранить прежнее сальдо бюджета, правительство профинансирует эту закупку за счет потоварного налога, взимаемого с производителей другого товара.

Считайте, что других событий, способных как-то повлиять на спрос и предложение товаров, в 2016 году не произойдет. Иными словами, не будет воздействия никаких прочих факторов, а рынки товаров X и Z не связаны между собой (то есть, например, X не является субститутом или комплементом Z, а также ресурсом для его производства). При расчете ВВП игнорируйте все возможные мультипликативные эффекты.

**а)** *(5 баллов)* Не проводя расчетов, определите, вызовет ли политика правительства инфляцию или дефляцию в стране Альфа в 2016 году. Аргументируйте свой ответ.

**б)** *(10 баллов)* Какую ставку потоварного налога на производство товара Z следует установить правительству для выполнения сформулированной задачи?

**в)** *(10 баллов)* На сколько процентов и в каком направлении в результате указанной политики изменится реальный ВВП страны Альфа? Считайте базовым 2015 год.

**г)** *(5 баллов)* Чему будет равен индекс потребительских (ИПЦ) в стране Альфа в 2016 году? Примите индекс 2015 года за единицу.

*Решение.*

**а)** Из-за действий государства на рынке товара X *вырастет спрос и, следовательно, вырастет равновесная цена.* На рынке товара Z *из-за введения налога тоже вырастет равновесная цена для потребителей.* Так как цены всех товаров растут, то *указанная политика правительства приведет к инфляции.*

По 1 баллу за спрос и равновесную цену

2 балла за рост цены как следствие налога

1 балл за вывод

**б)** В 2016 году за счет государственных закупок товара X *спрос на этот товар составит*:

1 балл за новую функцию спроса

$$X_D = \frac{10}{P_X} + 15.$$

Найдем *новое равновесие* на рынке этого товара:

2 балла за новое равновесие

$$\frac{10}{P_X} + 15 = 10 \cdot P_X, \tag{3.1}$$
$$P_X^{2016} = 2,\ X^{2016} = 20.$$

Для закупки 15 единиц товара X по такой равновесной цене *государству потребуется* $15 \cdot 2 = 30$ денежных единиц, следовательно, потоварный налог на рынке товара Z нужно устанавливать таким образом, чтобы поступления в бюджет в результате его введения равнялись этой сумме.

1 балл за расчет расходов

С учетом налога *функция предложения в 2016 году* будет иметь вид: $Z_S = 10 \cdot (P_Z - t)$, а функция спроса останется без изменений. Из всего сказанного выше следует система уравнений, откуда можно найти *все нужные нам переменные*:

1 балл за новую функцию $Z_S$

2 балла за запись нужных соотношений в том или ином виде

$$\begin{cases} \dfrac{40}{P_Z} = 10 \cdot (P_Z - t); \\ \dfrac{40}{P_Z} \cdot t = 30. \end{cases} \tag{3.2}$$

*Решая эту систему, находим:*

3 балла за нахождение $t = 3$

$$P_Z^{2016} = 4, \quad t = 3.$$

Ставка налога составляет 3 денежных единицы.

**Примечание**: участник может не искать равновесия на двух рынках по отдельности, а сразу составить систему из уравнения (3.1) и уравнений системы (3.2). При условии объяснения выполняемых действий баллы за такое решение снижаться не должны.

**в)** Чтобы найти равновесные параметры двух рынков до государственного вмешательства (в 2015 году), приравняем спрос и предложение из таблицы в условии:

$$\begin{cases} \dfrac{10}{P_X} = 10P_X; \\ \dfrac{40}{P_Z} = 10P_Z. \end{cases}$$

*Решив эту систему*, составим таблицу из известных значений цен и выпусков:

По 2 балла за каждое из двух равновесий в 2015 году

| | $P_X$ | $X$ | $P_Z$ | $Z$ |
|---|---|---|---|---|
| 2015 | 1 | 10 | 2 | 20 |
| 2016 | 2 | 20 | 4 | 10 |

*Реальный ВВП 2015 года* равен:

2 балла за РВВП-2015

$$P_X^{2015} \cdot X^{2015} + P_Z^{2015} \cdot Z^{2015} = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 50.$$

*Реальный ВВП 2016 года* (в ценах 2015 года) равен:

2 балла за РВВП-2016

$$P_X^{2015} \cdot X^{2016} + P_Z^{2015} \cdot Z^{2016} = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 40.$$

Таким образом, в результате реализации предложенной политики реальный ВВП упадет на 20 %.

По 1 баллу за подсчет процентного изменения и определение его направления

**г)**

3 балла за корректную формулу ИПЦ

2 балла за корректный подсчет

$$\text{ИПЦ} = \frac{P_X^{2016} \cdot X^{2015} + P_Z^{2016} \cdot Z^{2015}}{P_X^{2015} \cdot X^{2015} + P_Z^{2015} \cdot Z^{2015}} = \frac{2 \cdot 10 + 4 \cdot 20}{50} = 2.$$

## Задача 4. «Осторожный Кузьма» *(30 баллов)*

Депозит до востребования стабильно приносит Кузьме 10 % годовых. Сейчас на его счету находятся 1,5 миллиона рублей. Банк не накладывает никаких ограничений на снятие средств с депозита, ставка процента в любом случае остается неизменной.

Кузьма рассматривает возможность вложить деньги в более доходные, но и более рискованные финансовые инструменты. Он может купить акции компании-туроператора $A$ или компании $B$, продающей зонтики, а также комбинировать эти варианты.

Доходность акций в течение будущего года зависит от погоды, которая неизвестна заранее. Погода может оказаться либо хорошей (и тогда будут пользоваться популярностью услуги туроператора $A$), либо плохой (и тогда будут пользоваться популярностью зонтики компании $B$). Текущая стоимость активов, а также ожидаемая Кузьмой стоимость активов в зависимости от погоды представлены в таблице:

| Актив | Текущая стоимость актива | Ожидаемая стоимость актива | |
|---|---|---|---|
| | | при хорошей погоде | при плохой погоде |
| Акции $A$ | 10 руб. за акцию | 20 руб. за акцию | 6 руб. за акцию |
| Акции $B$ | 10 руб. за акцию | 7 руб. за акцию | 14 руб. за акцию |

Брать кредит Кузьма не может, других способов вложения денег нет. Обозначим за $a$ и $b$ суммы денег (в миллионах рублей), вложенные в акции соответствующих компаний, а за $d$ — сумму, оставшуюся на депозите. Под *стоимостью портфеля* будем понимать сумму стоимости имеющихся у Кузьмы акций и суммы денег на его счету.

**а)** *(8 баллов)* Предположим, что перед тем, как Кузьма должен принять решение о вложении в активы, Гидрометцентр делает одно из двух предсказаний: «будет хорошая погода» или «будет плохая погода». Как Кузьма поступит со своими деньгами в зависимости от прогноза (считайте, что он безоговорочно верит этому прогнозу), если он хочет, чтобы стоимость его портфеля через год была максимальной? Чему будет равна ожидаемая стоимость его портфеля через год в каждом из этих случаев?

**б)** *(15 баллов)* Предположим, Кузьма должен принять решение до того, как Гидрометцентр сделал прогноз. Для каждого распределения денег между акциями и депозитом он рассчитывает стоимость своего портфеля через год при *наименее благоприятной* для данного распределения денег погоде. Затем он выбирает такое распределение денег, при котором рассчитанная минимальная стоимость портфеля через год максимальна. Как он распределит деньги в этом случае? (Назовем такую стратегию *осторожной.*) Чему будет равна стоимость его портфеля через год?

**в)** *(7 баллов)* Если бы у Кузьмы была возможность заплатить Гидрометцентру, чтобы получить предсказание погоды до вложения в активы, какую максимальную сумму он был бы готов заплатить? Считайте, что оплата производится до предсказания, а Кузьма придерживается осторожной стратегии как при выборе распределения денег, так и и при принятии решения о том, покупать прогноз погоды или нет.

*Решение.* Заметим, что $a + b + d = 1{,}5$. Составим таблицу с расчетом стоимости всех активов Кузьмы в разных случаях и подставим $d = 1{,}5 - a - b$:

| Ожидаемая стоимость актива | |
|---|---|
| при хорошей погоде | при плохой погоде |
| $S_g = 2a + 0{,}7b + 1{,}1d = 1{,}65 + 0{,}9a - 0{,}4b$ | $S_b = 0{,}6a + 1{,}4b + 1{,}1d = 1{,}65 - 0{,}5a + 0{,}3b$ |

(Изначальные коэффициенты перед $a$ и $b$ рассчитаны как отношение новой и старой цены, то есть показывают, во сколько раз увеличиваются вложения. Соответствующее количество акций равно $a/10$ и $b/10$, а их стоимость через год, скажем, при хорошей погоде равна $20a/10 = 2a$ и $7a/10 = 0{,}7b$.)

**а)** Каждая из двух получившихся функций возрастает по одной из переменных ($a$ или $b$) и убывает по другой. Значит, для максимизации нужно выбирать максимально возможное значение одной переменной (1,5) и минимальное значение другой (0). Таким образом, нужно вкладывать в акции определенной компании все 1,5 миллиона, не оставляя ничего на депозите.

К такому же выводу можно было прийти, сравнив доходности трех активов: у депозита она равна 10 %, у компании $A$ в хорошую погоду и у компании $B$ в плохую погоду — больше (100 % и 40 %), а у компании $B$ в хорошую погоду и у компании $A$ в плохую погоду — меньше (−40 % и −30 %).

*Таким образом, при хорошем прогнозе погоды Кузьма вложит все деньги в акции компании* A, *а при плохом — вложит все деньги в акции компании* B, *не оставляя ничего на депозите.* (Также ответ можно дать в виде количества акций: нужно купить 150 тыс. акций соответствующей компании.) *В первом случае ожидаемая стоимость портфеля через год будет равна 3 млн руб., а во втором она будет равна 2,1 млн руб.*

По 3 балла за правильный вывод для каждого вида погоды с обоснованием

По 1 баллу за правильный расчет стоимости портфеля при каждой погоде

**Примечание**. Участник не обязан записывать функции конечной стоимости портфеля именно так, как они записаны выше. В частности, он может выражать из равенства $a + b + d = 1{,}5$ другую переменную и максимизировать функцию по оставшимся, или решать задачу условной максимизации, если знаком с соответствующими методами (эти методы не входят в школьную программу по математике, поэтому проверять подобные решения нужно с особой тщательностью, снижая баллы за все необоснованные шаги).

**б)** Найдем, при каком условии стоимость портфеля в хорошую погоду будет не меньше, чем в плохую (то есть минимальной будет стоимость портфеля при плохой погоде):

$$1{,}65 + 0{,}9a - 0{,}4b \geqslant 1{,}65 - 0{,}5a + 0{,}3b \iff 2a \geqslant b.$$

Минимальная (из двух типов погоды) стоимость портфеля Кузьмы составит

4 балла за расчет минимальной стоимости портфеля, из них 2 балла — за определение условия $2a \geqslant b$.

$$\min\{S_g; S_b\} = \begin{cases} 1{,}65 + 0{,}9a - 0{,}4b, & \text{если } 2a \leqslant b; \\ 1{,}65 - 0{,}5a + 0{,}3b, & \text{если } 2a \geqslant b. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Кузьма стремится, чтобы значение этого выражения было максимально, выбирая $a$ и $b$, удовлетворяющие условиям $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a + b \leqslant 1{,}5$. (Значение $d$ затем определяется автоматически из условия $d = 1{,}5 - a - b$.)

Зафиксируем $a$ и найдем оптимальное $b$ при каждом $a$. Как видно из формулы (4.1), Кузьме нужно выбирать самое маленькое $b$ при $2a \leqslant b$ и самое большое $b$ при $2a \geqslant b$. Так или иначе, решением будет $b = 2a$, то есть ему нужно сделать так, чтобы стоимость портфеля была одинакова независимо от погоды. Тогда стоимость активов будет равна

6 баллов за вывод о том, что $b = 2a$ (стоимость портфеля не зависит от погоды), с обоснованием

$$S = 1{,}65 + 0{,}9a - 0{,}4 \cdot 2a = 1{,}65 + 0{,}1a.$$

Видно, что эта функция возрастает по $a$, то есть оптимальным будет максимальное значение $a$, удовлетворяющие условию $a + 2a \leqslant 1{,}5$, откуда $a = 0{,}5$, $b = 2a = 1$, $d = 0$.

*Итак, Кузьма должен вложить 500 тыс. руб. в акции компании* А *и 1 млн руб. в акции компании* В. (Также ответ можно дать в виде количества акций: нужно купить 50 тыс. акций компании *A* и 100 тыс. акций компании *B*.) Стоимость портфеля через год при этом будет равна $S = 1{,}65 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 1{,}7$ млн руб. независимо от погоды.

4 балла за итоговый ответ о вложении денег с обоснованием

1 балл за расчет стоимости портфеля

**Примечание**. Как мы видим, оптимальной в данном случае является покупка акций обеих компаний. Это явление получило название *диверсификация портфеля* или *хеджирование рисков*. Действительно, если доходность двух акций находится «в противофазе» (экономисты говорят в этом случае об «отрицательной корреляции»), покупка акций второго типа является страховкой от убытков по акциям первого типа, и наоборот.

Это примечание носит информационный характер и не должно требоваться при проверке работ. Тем не менее, если участник, не решая задачу численно, опишет идею диверсификации (то есть сделает вывод, что инвестиции нужно делить между *A* и *B*), то за весь пункт ставится не более 5 баллов в зависимости от четкости обоснования.

**в)** Если Кузьма не платит Гидрометцентру, то, как мы нашли в **б)**, при использовании острожной стратегии он получает 1,7 млн. Если он заплатит Гидрометцентру сумму $X$, то в случае если будет предсказана хорошая погода, он получит 3 млн руб., а если плохая, он получит 2,1 млн руб. (это следует из решения пункта **а)**). Используя осторожную стратегию, он будет согласен заплатить $X$, если *даже в худшем из этих случаев (при плохой погоде) стоимость его портфеля не уменьшится по сравнению с пунктом* ***б)***. Для этого необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

4 балла за идею о том, что покупка прогноза должна окупаться в худшем случае

$$2{,}1 - X \geqslant 1{,}7.$$

Отсюда $X \leqslant 0{,}4$. Таким образом, Кузьма будет готов заплатить не более 400 тыс. рублей.

3 балла за нахождение $X$