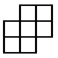
Решения задач 6 класса (1-й вариант).

1. Таблица 10×10 заполнена числами от 1 до 100: в первой строке слева направо выписаны числа от 1 до 10 в порядке возрастания; во второй строке точно так же выписаны числа от 11 до 20, и т. д.; в последней строке слева направо выписаны числа от 91 до 100. Можно ли в этой таблице найти фрагмент из 7 клеточек вида , сумма чисел в котором равна 455? (Фрагмент можно поворачивать.)

Ответ: да. Если в центре фрагмента стоит x, то сумма чисел в нем равна $7x$ и тогда при $x = 65$ сумма окажется в точности 455.

2. Костю в детстве неправильно научили складывать натуральные числа: он полагает, что после привычного всем сложения следует переставить цифры суммы в убывающем порядке. Обозначим сложение по Костиному правилу знаком $\oplus$ (например, $99 \oplus 2 = 110$.) Существуют ли такие натуральные числа a и b, для которых $a \oplus b = a$?

Ответ: нет. При обычном сложении число увеличится, а при перестановке цифр еще больше увеличится. Поэтому $a \oplus b$ всегда строго больше, чем a.

3. За большим круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; все что угодно, если слева от него чудак. Каждый сказал: «Справа от меня сидит лжец». Сколько всего лжецов? Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.

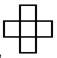
Ответ: 50 или 0 лжецов. Если за столом есть лжец, тогда справа от лжеца — чудак или рыцарь. В такой ситуации оба они говорят правду, значит, следующий после них — снова лжец. Получаем, что лжецы и не лжецы чередуются, т.е. лжецов ровно половина.

Если же лжецов за столом нет, то рыцарей тоже нет (потому что справа от рыцаря должен быть лжец) и за столом одни чудаки.

4. Учительница считает некоторых учеников 6^a класса отличниками, а остальных — двоечниками. В течение четверти в классе прошло 6 контрольных по математике (на них ставились оценки от 2 до 5). На каждой контрольной присутствовали все ученики, и на каждой контрольной они рассаживались по двое за парту (возможно, на разных контрольных по-разному). Двоечник чудесным образом получал тройку, если сидел за одной партой с отличником, и двойку, если сидел с другим двоечником. Всего за эти контрольные пятёрок было получено в 3 раза больше, чем четвёрок, а троек — на 10 меньше, чем двоек. Докажите, что найдется отличник, получивший хотя бы одну оценку не выше тройки.

Решение. Допустим, что такого отличника нет. Тогда все двойки получены двоечниками. Суммарное число двоек за все шесть контрольных четно, потому что их получали двоечники, сидящие за одной партой. Так как суммарное число троек на 10 меньше, общее количество двоек и троек — четное число, не делящееся на 4. По условию, пятерок в три раза больше четверок, т. е. суммарное число четверок и пятерок делится на 4. Таким образом, суммарное количество всех оценок не делится на 4. Но это невозможно, так как на каждой из шести контрольных ставилось одно и то же четное число оценок!

Решения задач 7 класса (1-й вариант).

1. Таблица 70×70 заполнена числами от 1 до 4900: в первой строке слева направо выписаны числа от 1 до 70 в порядке возрастания; во второй строке точно так же выписаны числа от 71 до 140, и т. д.; в последней строке слева направо выписаны числа от 4831 до 4900. Можно ли в этой таблице найти крест из 5 клеточек вида , сумма чисел в котором равна 2018?

Такого фрагмента нет. Если в центре фрагмента стоит x, то сумма чисел в нем равна $5x$, т.е. делится на 5, и потому не может быть равна 2018.

2. За большим круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; все что угодно, если слева от него чудак. Каждый сказал: «Справа от меня сидит лжец». Сколько всего лжецов? Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Ответ: 50 или 0 лжецов. Если за столом есть лжец, тогда справа от лжеца — чудак или рыцарь. В такой ситуации оба они говорят правду, значит, следующий после них — снова лжец. Получаем, что лжецы и не лжецы чередуются, т.е. лжецов ровно половина.

Если же лжецов за столом нет, то рыцарей тоже нет (потому что справа от рыцаря должен быть лжец) и за столом одни чудаки.

3. Точки M и N — середины равных сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. На продолжении отрезка MN за точку N отмечена точка X, а на отрезке NX — точка Y так, что $MN = XY$. Докажите, что $BY = CX$.

Решение. Треугольники BMY и CNX равны по первому признаку равенства: $BM = CN$, $MY = NX$, $\angle BMY = \angle BNM = \angle CNX$. Поэтому их стороны BY и CX равны.

4. На парковке стоят машины. Среди них есть машины марок «Тойота», «Хонда», «Шкода», а также машины других марок. Известно, что не «Хонд» в полтора раза больше, чем не красных машин; не «Шкод» в полтора раза больше, чем не желтых машин; наконец, не «Тойот» вдвое меньше, чем красных и желтых машин вместе. Докажите, что «Тойот» не меньше, чем «Хонд» и «Шкод»вместе.

Решение. Назовем все другие марки Фордами, а все другие цвета — зелеными. По условию, т+ш+ф= 1.5(ж+з), т+х+ф= 1.5(к+з), х+ш+ф= 0.5(к+ж). Сложим первые два уравнения и вычтем утроенное третье: 2т−2ш−2х−ф=3з. Отсюда видно, что 2т−2ш−2х — неотрицательное число, что и требовалось.

Решения задач 8 класса (1-й вариант).

1. Любитель Дима и профессионал Федя наломали дров и похвастались друг другу, кто сколько наломал. При этом Дима преувеличил результат своей работы в 2 раза, Федя в 7 раз, а в сумме получилось втрое больше дров, чем на самом деле. Кто наломал дров больше и во сколько раз?

Ответ: Дима наломал дров в 4 раза больше, чем Федя. Из уравнения $2D + 7F = 3(D + F)$ *немедленно получаем* $D = 4F$.

2. За круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; все что угодно, если слева от него сидит чудак. Каждый сказал: «Справа от меня сидит лжец». Сколько за столом лжецов? Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Ответ: 50 или 0 лжецов. Если за столом есть лжец, тогда справа от лжеца — чудак или рыцарь. В такой ситуации оба они говорят правду, значит, следующий после них — снова лжец. Получаем, что лжецы и не лжецы чередуются, т.е. лжецов ровно половина.

Если же лжецов за столом нет, то рыцарей тоже нет (потому что справа от рыцаря должен быть лжец) и за столом одни чудаки.

3. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна диагонали BD. Точка M — середина диагонали AC. Прямая BM пересекает отрезок CD в точке E. Докажите, что $BE = CE$.

Решение. Пусть F *— точка пересечения прямых* AD *и* BM*. Тогда* $ABCF$ *— параллелограмм. Поэтому* $AB = CF$ *и* $BCFD$ *— равнобочная трапеция.* E *— точка пересечения ее диагоналей, поэтому* $BE = CE$.

4. У Оли есть прямоугольная шоколадка с целыми сторонами, разбитая на единичные квадратики. Площадь шоколадки делится на 1000. Докажите, что Оля может съесть несколько квадратиков так, чтобы оставшаяся часть шоколадки оказалась прямоугольником, а площадь съеденной части составляла бы ровно 73 % от исходной.

Решение. Поскольку $1000 = 5^3 \cdot 2^3$*, одна из сторон шоколадки делится на* 5^2 *и одна из сторон — на* 2^2*. Если это одна и та же сторона, то она делится на 100, отрежем поперек этой стороны 27/100 шоколадки и остальное съедим. Если же это разные стороны, отрежем 9/25 по одной стороне и 3/4 по другой, опять получится шоколадка площади 27/100.*

5. Кузнечик начинает движение в левой верхней клетке квадрата 10×10. Он может прыгать на одну клетку вниз или вправо. Кроме того, кузнечик может из самой нижней клетки любого столбца перелететь в самую верхнюю клетку того же столбца, а из самой правой клетки любой строки перелететь в самую левую клетку той же строки. Докажите, что кузнечику понадобится хотя бы 9 перелетов, чтобы побывать на каждой клетке квадрата хотя бы по одному разу.

Решение. На диагонали, идущей слева снизу вправо вверх, находится 10 клеток. После того как кузнечик добрался до одной из них, чтобы посетить следующую, ему потребуется добраться до края и сделать перелет. Между посещениями этих 10 клеток он совершит не менее 9 перелетов.

Решения задач 9 класса (1-й вариант).

1. $f(x)$ — квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом. Наименьшее значение квадратного трехчлена $f(2x)-f(x)$ равно -1. Найдите наименьшее значение квадратного трехчлена $f(3x)-f(x)$.

Ответ: -1.5. *Пусть* $f(x)=ax^2+bx+c$. *Тогда* $f(2x)-f(x)=3ax^2+bx$, *а* $f(3x)-f(x)=8ax^2+2bx$. *Наименьшие значения равны соответственно* $-b^2/12a$ *и* $-b^2/8a$. *Если первое из них равно* -1, *то второе равно* $-3/2$.

2. Дано натуральное число n. В белой таблице $1000n\times 1000n$ некоторые клетки покрашены в черный цвет. Известно, что при любом натуральном k, таком что $n^2\leqslant k\leqslant n^2+n-1$, в каждом клетчатом прямоугольнике площади k есть хотя бы одна черная клетка. Докажите, что в любом клетчатом прямоугольнике площади n^2+n тоже есть черная клетка.

Решение. Пусть стороны прямоугольника площади n^2+n *равны* $a\leqslant b$. *Ясно, что* a *не превосходит* n. *Отрежем от прямоугольника полоску* $1\times a$. *Останется прямоугольник, площадь которого, с одной стороны, не больше* n^2+n-1, *а с другой, не меньше* $n^2+n-n=n^2$. *По условию, в нём есть черная клетка, значит, она же есть и в исходном прямоугольнике.*

3. Найдите наименьшее натуральное число N, у которого существует три *различных* натуральных делителя, произведение которых равно 14^{600}.

Ответ: $2\cdot 14^{200}=2^{201}\cdot 7^{200}$. *У этого числа есть делители* $2^{201}\cdot 7^{200}$, $2^{200}\cdot 7^{200}$, $2^{199}\cdot 7^{200}$, *произведение которых равно* $2^{600}\cdot 7^{600}$.

Докажем, что N *обязано быть не меньше, чем* $2\cdot 14^{200}$. *Ясно, что число* N *должно делится на* 2^{200}, *иначе в произведение его трех делителей двойка войдет в степени меньшей, чем 600. Аналогично,* N *кратно* 7^{200}. *Таким образом,* N *кратно* 14^{200}. *Но* N *не может быть равно в точности* 14^{200}, *поскольку у этого числа есть лишь один делитель, равный* 14^{200} *(остальные меньше), и произведение трех любых делителей строго меньше* 14^{600}. *Следовательно,* $N\geqslant 2\cdot 14^{200}$, *что и требовалось.*

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Точка, симметричная точке E относительно прямой BD, лежит на описанной окружности треугольника ABC. Найдите отношение $AD:CD$.

Ответ: $AD:CD=3:1$. *Решение. Обозначим точку, симметричную* E, *через* E'. *Пусть* C' — *точка, симметричная* C *относительно высоты* BD. *В силу симметрии* $\angle BEC'=\angle BE'C=180^\circ-\angle A$. *Значит,* $\angle AEC'=\angle A$. *Таким образом, треугольник* AEC' *равнобедренный,* $AC'=EC'$. *Далее,* $\angle CEC'=90^\circ-\angle A=\angle ECC'$, *то есть треугольник* CEC' *также равнобедренный,* $CC'=EC'$. *Итак,* $AC'=C'C$, *т.е.* C' — *середина стороны* AC. *Ну а поскольку* D — *середина* CC', *то* $AD=3CD$.

5. Найдите все значения, которые может принимать выражение $[x]\cdot\left[\frac{2000}{x}\right]$ при положительных x. (Как обычно, через $[a]$ обозначается целая часть числа a, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a.)

Ответ: 0, а также все натуральные значения от 1000 до 2000.

Обозначим число $2000/x$ *через* y. *В задаче идет речь про произведение целых частей двух положительных чисел* x *и* y, *для которых* $xy=2000$.

Ясно, что обе целые части неотрицательны. Если одна из них равна 0, то и произведение равно 0.

Рассмотрим теперь случай, когда обе целые части положительны. Докажем, что их произведение лежит между 1000 и 2000. Верхняя оценка очевидна: $[x][y]\leqslant xy=2000$.

Пусть одна из целых частей равна 1, например, первая. Тогда $x<2$, $y=2000/x>1000$, *и* $[x][y]\geqslant 1\cdot 1000=1000$.

Осталось рассмотреть случай, когда обе целые части больше или равны 2. Ясно, что хотя бы одна из них больше или равна 3 (иначе оба числа x *и* y *меньше 3, что невозможно). Не умаляя общности допустим, что* $[x]\geqslant 2$, $[y]\geqslant 3$.

Заметим, что $[x]/x\geqslant [x]/([x]+1)\geqslant 2/3$ *при* $[x]\geqslant 2$. *Аналогично,* $[y]/y\geqslant [y]/([y]+1)\geqslant 3/4$ *при* $[y]\geqslant 3$. *Перемножая эти неравенства, получаем* $[x][y]/xy\geqslant 1/2$, *откуда* $[x][y]\geqslant 1000$.

Наконец, убедимся, что любое из этих значений достигается. Значение 0 достигается при любом $0<x<1$. *Кроме того, при всех* $x\in[1,2)$ *число* $1000/x$ *принимает все значения из интервала* $(1000,2000]$, *и его целые часть принимает любое целое значение от 1000 до 2000. Умножая их на* $[x]=1$, *получаем все ответы от 1000 до 2000.*

Решения задач 10 класса (1-й вариант).

1. $f(x)$ — квадратный трёхчлен. Наименьшее значение функции $f(2x) - f(x)$ равно -1. Найдите наименьшее значение функции $f(3x) - f(x)$.

Ответ: $-3/2$. *Пусть* $f(x) = ax^2 + bx + c$. *Тогда* $f(2x) - f(x) = 3ax^2 + bx$, *а* $f(3x) - f(x) = 8ax^2 + 2bx$. *Наименьшие значения равны соответственно* $-b^2/12a$ *и* $-b^2/8a$. *Если первое из них равно* -1, *то второе равно* $-3/2$.

2. Произведение трёх разных натуральных делителей натурального числа N равно $1\,000\,000$. Найдите наименьшее такое N.

Ответ: $200 = 2^3 \cdot 5^2$. *У этого числа есть делители* $2^3 \cdot 5^2$, $2^2 \cdot 5^2$, $2 \cdot 5^2$, *произведение которых равно* $2^6 \cdot 5^6$.

Докажем, что N *обязано быть не меньше, чем 200. Ясно, что число* N *должно делится на* 2^2, *иначе в произведение его трех делителей не будет делиться на* 2^6. *Аналогично,* N *кратно* 5^2. *Таким образом,* N *кратно* $100 = 2^2 \cdot 5^2$. *Но* N *не может быть равно в точности* 100, *поскольку у этого числа есть лишь один делитель, равный* 100, *(остальные меньше), и произведение трех любых делителей строго меньше* $1\,000\,000$. *Следовательно,* $N \geqslant 200$, *что и требовалось.*

3. На графике функции $y = x^3 + 3x$ расположены четыре точки, являющиеся вершинами параллелограмма. Докажите, что центр этого параллелограмма — начало координат.

Решение. Пусть (a, b) *— центр параллелограмма. Тогда абсциссы вершин параллелограмма имеют вид* $x_1 = a+p$, $x_2 = a+q$, $x_3 = a-p$, $x_4 = a-q$ *для некоторых* p *и* q. *Кроме того, их ординаты удовлетворяют условиям* $y_1 + y_3 = y_2 + y_4 = 2b$. *Получаем:*

$$(*) \qquad 2b = (a+p)^3 + 3(a+p) + (a-p)^3 + 3(a-p) = (a+q)^3 + 3(a+q) + (a-q)^3 + 3(a-q).$$

После раскрывания скобок и упрощения: $2a^3 + 6ap^2 + 6a = 2a^3 + 6aq^2 + 6a$, *то есть* $ap^2 = aq^2$. *Поскольку абсциссы вершин параллелограмма, очевидно, раличны, т.е.* $p \neq \pm q$, *число* a *обязано равняться 0. Но тогда из (*) получаем* $2b = p^3 + 3p - p^3 - 3p = 0$, *т.е.* $b = 0$.

4. В треугольнике ABC с $\angle B = 100^\circ$ проведена высота BD. На отрезках AD и CD выбраны точки X и Y так, что $XY = AC/2$. На сторонах AB и BC выбраны точки Z и T соответственно так, что $AX = XZ$ и $CY = YT$. Найдите $\angle ZDT$.

Ответ: 80°. *Поскольку* $AX + CY = XY$, *на отрезке* XY *можно отметить такую точку* P, *что* $XP = AX$, $YP = CY$. *В треугольнике* AZP *имеем* $AX = XP = XZ$, *поэтому он прямоугольный:* $\angle AZP = 90^\circ$. *Аналогично,* $\angle CTP = 90^\circ$. *Таким образом, точки* T *и* Z *лежат на окружности с диаметром* BP. *На ней же лежит и точка* D *(ибо* $\angle BDP$ *также прямой). Следовательно, четырехугольник* $BZDT$ *— вписанный, и потому* $\angle ZDT = 180^\circ - \angle ZBT = 80^\circ$.

5. Клетчатый квадрат 1024×1024 разрезан на квадраты 32×32. Можно ли раскрасить все его клетки в 512 цветов так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом из получившихся квадратов 32×32 каждый цвет встречался ровно два раза?

Ответ: можно. Докажем следующую лемму. Пусть квадрат $n^2 \times n^2$ *разбит на* n^2 *квадратов* $n \times n$. *Все его клетки можно раскрасить в* n^2 *цветов так, чтобы в каждой строчке, в каждом столбце и в каждом квадрате разбиения каждый цвет встречался ровно один раз (этот принцип используется в головоломках “судоку”).*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5

Приведем одну из возможных конструкций раскраски (пример для $n = 3$ *показан на рисунке). Пусть* A *— левый-верхний квадрат* $n \times n$. *Покрасим его в* n^2 *разных цветов. Теперь покрасим следующий справа квадрат* $n \times n$, *сдвинув строчки квадрата* A *по циклу. Еще раз сдвинув их по циклу, покрасим следующий квадрат, и т.д.*

Теперь покрасим следующие n *строк. Для этого самый левый квадрат в них покрасим, сдвинув по циклу столбцы квадрата* A. *Следующие квадраты в этих строках покрасим, снова сдвигая строки по циклу.*

Продолжая далее сверху вниз, покрасим весь квадрат. Пример раскраски квадрата 9×9 *приведен на рисунке.*

Из доказанной леммы легко следует решение задачи. Раскрасим квадрат 1024×1024 *в 1024 цвета, как требуется в лемме; затем разобьем все цвета на 512 пар, и в каждой паре заменим один из цветов на другой. Теперь в каждой строчке, в каждом столбце и в каждом квадрате все 512 цветов встречаются по два раза.*

Решения задач 11 класса (1-й вариант).

1. Многочлен степени 10 имеет три различных корня. Какое наибольшее количество нулевых коэффициентов у него может быть?

Ответ: 9 нулевых коэффициентов. Таков, например, многочлен $x^{10} - x^8$ *с корнями* 0, 1, -1. *Если же у многочлена лишь один ненулевой коэффициент, то он имеет вид* ax^{10}, *и поэтому имеет ровно один корень.*

2. Все рыбаки делятся на обычных и честных. Честный рыбак преувеличивает вес пойманных им рыб ровно в 2 раза, а обычный рыбак — в целое, большее шести, число раз (эти коэффициенты у разных обычных рыбаков могут быть разными). 10 рыбаков поймали вместе 120 кг рыбы. Каждый заявил, что поймал ровно 60 кг рыбы. Сколько среди них было обычных рыбаков? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

Каждый честный рыбак поймал ровно 30 кг, а каждый обычный — меньше $60/6 = 10$ *кг рыбы. Поэтому честных рыбаков не могло быть ноль (10 обычных поймали бы меньше 100 кг). Аналогично, не мог быть ровно один честный рыбак (9 обычных поймали бы меньше 90 кг, а вместе с честным — меньше 120 кг).*

Далее, если честных рыбаков было четверо, то обычные рыбаки не поймали ничего, и не могли сообщить, что они поймали 60 кг. Тем более, честных рыбаков не могло быть больше четырех.

Итак, честных рыбаков могло быть лишь двое или трое. Оба эти варианта осуществимы. Например, 2 честных по 30 кг и 8 обычных по $60/8 = 15/2$ *кг, или 3 честных по 30 кг и 7 обычных по* $60/14 = 30/7$ *кг.*

3. В группе детского сада 26 детей. Когда дети вышли на прогулку, у каждого было две варежки одинакового цвета, причем варежки разных детей — разного цвета. Во время прогулки дети трижды строились парами (не обязательно одним и тем же способом). Во время первого построения дети в каждой паре поменялись левыми варежками, во время второго — правыми. Когда они построились в третий раз, оказалось, что у каждой пары детей имеются две варежки одного цвета, две — другого. Докажите, что в этот момент есть ребенок в одинаковых варежках.

Если у ребенка A надеты варежки цветов x и y (x на левую руку, y на правую), будем обозначать этот факт записью A(x,y).

Если какой-то ребенок оба раза обменяется варежками с одним и тем же ребенком, то у него окажутся две одинаковые варежки. Поэтому будем предполагать, что такого не произошло. Возьмем произвольного ребенка A(1,1) перед самым первым обменом. Пусть он в первый раз меняется с B(2,2), во второй раз меняется с ребенком C, а ребенок C(3,3) в первый раз обменялся с D(4,4). После первых обменов получится: A(2,1), B(1,2), C(4,3), D(3,4). После второго обмена A и C получится: A(2,3), C(4,1). Для третьего построения ребенку A в пару требуется еще один ребенок с варежками 2 и 3 цветов. Но такой ребенок после второго обмена может образоваться, лишь если B(1,2) поменяется с D(3,4). При этом во время третьего построения A(2,3) окажется в паре с D(3,2), а ребенок B(1,4) окажется в паре с C(4,1).

Таким образом, все дети должны разбиться на четверки (каждая четверка тремя разными способами разбивается на три пары). Но количество детей не делится на 4, поэтому такое разбиение невозможно!

4. Точки X и Y — середины дуг AB и BC описанной окружности треугольника ABC. BL — биссектриса этого треугольника. Оказалось, что $\angle ABC = 2\angle ACB$ и $\angle XLY = 90^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = \angle C = 45^\circ$.

По условию $\angle C = \angle B/2 = \angle LBC$, *то есть треугольник* BLC *равнобреденный:* $BL = CL$. *Кроме этого,* $BY = YC$, *так что треугольники* BLY *и* CLY *равны по трем сторонам, и* LY *— биссектриса угла* BLC. *По условию, прямая* LX *перпендикулярна этой биссектрисе, поэтому* LX *— биссектриса угла* BLA.

Теперь расмотрим треугольники XAL *и* XBL. *У них есть общая сторона* LX, *равны стороны* $AX = BX$, *а также равны углы* ALX *и* BLX. *К сожалению, эти углы находятся не между равными сторонами, поэтому первый признак равенства не применим. Однако это означает, что углы* XAL *и* XBL *либо равны, либо дополняют друг друга до* 180°. *(Проще всего объяснить это с помощью теоремы синусов в треугольниках* XAL *и* XBL: $\sin XAL = \sin XBL$.*) Во втором случае четырехугольник* $AXBL$ *оказался бы вписанным, чего не может быть: точка* L *не лежит на коружности, проходящей через* A, B *и* X. *Следовательно, треугольники* XAL *и* XBL *всё же равны и* $AL = CL$.

Итак, $AL = BL = CL$, *т.е. медиана треугольника* ABC *равна половине стороны* AC. *Это значит, что треугольник прямоугольный. А поскольку мединана* BL *совпадает с бисектрисой, он еще и равнобедренный.*

5. Даны натуральные числа m и n ($m < n$) и большая шоколадка, стороны которой делятся на n^5. (Все шоколадки в этой задаче — клетчатые прямоугольники, сторона клетки равна 1.) Леша пять раз съедал по несколько клеточек так, что получалась очередная меньшая шоколадка, площадь которой каждый раз составляла долю m/n от площади предыдущей шоколадки. Докажите, что он сможет съесть еще несколько клеточек так, что получится совсем уже маленькая шоколадка, площадь которой составляет долю $(m/n)^{10}$ от площади исходной большой шоколадки.

Пусть исходная шоколадка имела размеры $an^5 \times bn^5$. *Тогда ее площадь была равна* abn^{10}. *Пусть после пятикратного обкусывания получилась шоколадка* $x \times y$ *площади* $xy = abm^5n^5$. *Так как* $x \leqslant an^5$, $y \leqslant bn^5$, *то* $x \geqslant bm^5$, $y \geqslant am^5$. *Это значит, что шоколадку* $x \times y$ *можно уменьшить до размеров* $bm^5 \times am^5$ *и эта шоколадка как раз в* $(m/n)^5$ *раз отличается по площади от шоколадки* $x \times y$.