САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 года ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 9 класс.

---

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ переставляет местами различные числа a и b (т.е. $f(a) = b$ и $f(b) = a$). Докажите, что он не переставляет местами никакие другие два числа.

2. Остроугольный треугольник ABC, все углы которого больше $30°$, вписан в окружность с центром O и радиусом R. Точка K — проекция O на биссектрису угла B, точка M — середина стороны AC. Оказалось, что $2KM = R$. Найдите угол B. (*С. Берлов*)

3. 100 депутатов образовали 450 комиссий. Каждые две комиссии пересекаются не более чем под трем депутатам, а каждые 5 — не более чем по одному. Докажите, что есть четыре комиссии, пересекающиеся ровно по одному депутату.

(*А. Голованов*)

4. Назовём натуральное число *почтенным*, если сумма всех его делителей, включая 1, но не включая само число, на 1 меньше этого числа. Найдите все почтенные числа, некоторая точная степень которых тоже почтенна. (*А. Голованов*)

. . . .

Олимпиада 2014 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. На клетчатую плоскость со стороной клетки, равной 1, произвольным образом брошена салфетка 100×100. Она накрывает некоторые узлы (узел, лежащий на границе салфетки, тоже считается накрытым). Каким наименьшим числом прямых (идущих не обязательно по линиям сетки) заведомо можно покрыть все эти узлы?

(*А. Голованов*)

6. На данной окружности зафиксированы точки A и B. Точки C и D движутся по одной из дуг AB так, что отрезок CD имеет постоянную длину. Точки I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABC и ABD. Докажите, что прямая I_1I_2 все время касается некоторой фиксированной окружности. (*С. Берлов*)

7. Натуральные числа a, b и c попарно взаимно просты. В бесконечной клетчатой таблице расставлены целые числа так, что сумма чисел в любом квадрате $a \times a$ четна, в любом квадрате $b \times b$ четна и в любом квадрате $c \times c$ тоже четна. Верно ли, что для любых a, b, c такая ситуация возможна, только если все числа в таблице четные?

(*А. Храбров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 10 КЛАСС.

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ переставляет местами различные числа a и b (т.е. $f(a) = b$ и $f(b) = a$). Докажите, что он не переставляет местами никакие другие два числа.

2. На двух параллельных прямых отмечено по 40 точек. Их разбивают на 40 пар так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. (В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке.) Докажите, что число способов это сделать меньше чем 3^{39}. (*Н. Филонов*)

3. Внутри треугольника ABC отмечена точка D, а на отрезке BD — точка E так, что $BD = CE$. Оказалось, что $\angle ABD = \angle ECD = 10°$, $\angle BAD = 40°$ и $\angle CED = 60°$. Докажите, что $AB > AC$. (*А. Пастор*)

4. Набор положительных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{100n}$ обладает следующим свойством: если из этого набора выбрать любые $2n+1$ чисел, то сумма n наибольших из выбранных чисел будет больше суммы оставшихся $n+1$ чисел. Докажите, что

$$(n+1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) > a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{100n}.$$

(*С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2014 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны AC в точке B_1. На окружности ω отмечены точки E и F, такие что $\angle AEB_1 = \angle B_1FC = 90°$. Касательные к окружности ω в точках E и F пересекаются в точке D, причем точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Точка M — середина стороны AC. Докажите, что прямые AE, CF и DM пересекаются в одной точке. (*А. Смирнов*)

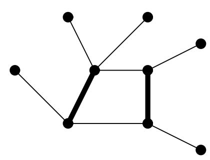
6. Дано бесконечное множество натуральных чисел M. Известно, что для любых двух различных чисел $a, b \in M$ в множестве M также содержится хотя бы одно из чисел $a^b - 2$ и $a^b + 2$. Докажите, что в M содержится хотя бы одно составное число.

7. Некоторые города Триодиннадцатого царства соединены дорогами с односторонним движением. Известно, что любой замкнутый циклический маршрут по дорогам этой страны, не нарушающий правил дорожного движения, проходит по четному числу дорог. Докажите, что царь сможет разместить в некоторых городах военные базы так, чтобы между этими городами не было дорог, но в любой город, где нет базы, можно было добраться из города, где база есть, проехав ровно одну дорогу. (*сообщил Н. Гравин*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

1. Обозначим через $f(x)$ функцию, которая равна 1 при любом целом x, и равна 0 при остальных x. Учительница дала задание двоечнику Васе записать функцию $f(x)$ с помощью букв x, целых чисел, знаков сложения, вычитания, умножения, деления и операции взятия целой части. Помогите Васе.

2. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит не более 100 дорог. Набор дорог называется *идеальным*, если эти дороги не имеют общих концов, но больше ни одной дороги с сохранением этого условия добавить к этому набору нельзя. (На рисунке выделены две дороги, образующие идеальный набор.) Министерство транспорта каждый день выбирает какой-нибудь идеальный набор дорог и полностью разрушает их. Новых дорог министерство не строит. Докажите, что не более чем через 199 таких операций в стране вообще не останется дорог. (*С. Берлов*)



3. Дано натуральное число N. На доске написаны числа от N^3 до $N^3 + N$. Среди них a чисел покрасили в красный цвет, а какие-то b из остальных — в синий. Оказалось, что, что сумма красных чисел делится на сумму синих. Докажите, что a делится на b.

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C_1 и B_1 соответственно, отрезок B_1C_1 параллелен BC. Окружность, проходящая через A, B и B_1, пересекает отрезок CC_1 в точке L. Известно, что описанная окружность треугольника CLB_1 касается прямой AL. Докажите, что $AL \leq (AC + AC_1)/2$. (*С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2014 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Дано бесконечное множество M натуральных чисел. Для любых двух различных его элементов a и b в множестве M также лежит хотя бы одно из чисел $a^b - 2$ и $a^b + 2$. Докажите, что в M содержится хотя бы одно составное число.

6. В каждой клетке квадрата $n \times n$ стоит ребенок. Каждый из них смотрит в сторону одной из соседних по стороне клеток (никто не смотрит за пределы квадрата) и видит либо ухо, либо затылок ребенка, стоящего в этой клетке. Какое наименьшее число детей может видеть ухо? (*К. Кохась, А. Храбров*)

7. Точка M — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC, I — центр его вписанной окружности, L — основание биссектрисы AL. Прямая MI пересекает описанную окружность в точке K. Описанная окружность треугольника AKL пересекает прямую BC вторично в точке P. Докажите, что $\angle AIP = 90°$.