Городской тур 2014. 9 класс.

Задача 1.

Пусть Фрося использовал свою силу в момент времени t_0, тогда его скорость в этот момент была $v_0 = at_0$. К финишу в момент времени $t_1 = 60$ с Фрося подойдет со скоростью $v_1 = 2v_0 + a(t_1 - t_0)$. Нарисуем график зависимости скорости Фроси от времени $v(t)$ (см. рис.1).

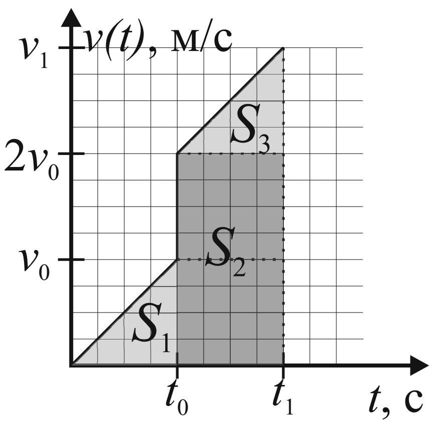


Рис. 1:

Разобьем его на три части так, как показано на рисунке. Весь путь Фроси - площадь под графиком - равен:

$$S = S_1+S_2+S_3 = 1/2v_0t_0+2v_0(t_1-t_0)+1/2(v_1-2v_0)(t_1-t_0),$$

что, после подстановки скорости Фроси на финише v_1, приведет к следующему выражению:

$$S = 2v_0t_1 - 3/2v_0t_0 + 1/2a(t_1 - t_0)^2.$$

После подстановки $v_0 = at = 1*t_0$ и $t_1 = 60$ с получается квадратичная функция от времени t_0:

$$S = 1800 + 60t_0 - t_0^2,$$

максимум которой находится в вершине параболы $t_0 = 30$с.

Ответ: Фросе надо увеличить свою скорость в момент времени $t_0 = 30$с.

Задача 2.

Будем решать эту задачу, используя интуитивно понятный принцип: если в цепи увеличить (уменьшить) одно из сопротивлений, то общее сопротивление цепи не уменьшится (не увеличится). Обоснованием этого принципа (иногда он называется теоремой Рэлея о монотонности) мы займёмся позже, а пока посмотрим, как он поможет в решении задачи.

Итак, выясним, что произойдёт с цепью, если убрать из неё сопротивление R_5.

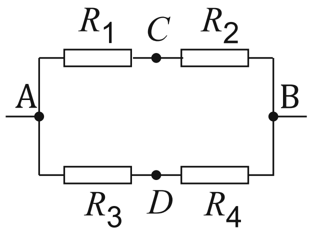


Рис. 2: Исходная схема без сопротивления R_5.

Легко посчитать сопротивление этой схемы. Оно равно

$$R_{\max} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{15}{8} \text{ Ом.} \qquad (1)$$

Выбросив сопротивление R_5, мы фактически заменили его на очень большое (бесконечно большое) сопротивление — ведь теперь непосредственно между точками C и D не течёт ток. Воспользуемся нашим принципом. Согласно ему, при замене сопротивления R_5 на большее, общее сопротивление схемы (которое и требуется оценить в задаче) *не уменьшается.* Таким образом, мы можем написать

$$R_{AB} \leq R_{\max} = \frac{15}{8} \text{ Ом.} \qquad (2)$$

Вернёмся к исходной схеме. У нас уже есть верхняя оценка для сопротивления, и теперь нам нужна нижняя оценка. Её можно получить, заменив сопротивление R_5 проводом. Это равносильно тому, что R_5 уменьшается до нуля. Согласно нашему принципу, общее сопротивление цепи при такой операции *не увеличивается.* Получившаяся схема выглядит так:

Точки C и D теперь представляют собой одну точку: у них одинаковый потенциал, так как они соединены проводом. Наша схема теперь эквивалентна последовательному соединению двух параллельных блоков (R_1 и R_3; R_2 и R_4). Её сопротивление рассчитывается как

$$R_{\min} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{28}{15} \text{ Ом}. \tag{3}$$

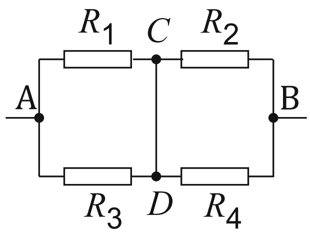


Рис. 3: Исходная схема с нулевым R_5.

Согласно всему вышесказанному, исходное сопротивление R_{AB} лежит между $R_{\min}$ и $R_{\max}$, т.е.

$$\frac{28}{15} \text{ Ом} \le R_{AB} \le \frac{15}{8} \text{ Ом}. \tag{4}$$

Легко убедиться, что эта оценка удовлетворяет условию задачи, так как точность не превышает 0,01 Ом ($15/8 - 28/15 = 1/120$). Таким образом, мы получили ответ к поставленной задаче — оценили общее сопротивление цепи с требуемой точностью.

Теперь обсудим доказательство теоремы Рэлея о монотонности. Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из некоторого числа резисторов с известными сопротивлениями. Эти резисторы соединены между собой произвольным образом. Пронумеруем узлы (точки соединения резисторов) числами от 1 до n. Между узлами с номерами i и j включен резистор с сопротивлением R_{ij}. Предположим также, что цепь подключена к источнику так, что между узлами 1 и n есть напряжение U.

При протекании тока в такой цепи выделяется тепло. На каждом резисторе выделяется теплота q_{ij}, подсчитать которое можно с помощью закона Джоуля-Ленца:

$$q_{ij} = \frac{(\varphi_i - \varphi_j)^2}{R_{ij}}. \tag{5}$$

Здесь φ_j, φ_j — потенциалы в узлах i и j. Разность этих потенциалов и обеспечивает напряжение на резисторе R_{ij}.

Полная теплота Q, выделяющаяся в цепи, равна сумме q_{ij} по всем резисторам:

$$Q = \sum_{i,j} q_{ij} = \sum_{i,j} \frac{(\varphi_i - \varphi_j)^2}{R_{ij}}. \tag{6}$$

Будем рассматривать Q как функцию всех потенциалов, $Q(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. В действительности потенциалы φ_1 и φ_n у нас зафиксированы (в этих местах наша цепь подключена к источнику), поэтому в дальнейшем будем писать $Q(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$.

Пока мы ничего не знаем о том, как устроены эти потенциалы. Из общей физической интуиции мы знаем, что ток течёт таким образом, что теплопотери оказываются минимальными. Посмотрим, к чему приведёт это требование.

Для простоты зафиксируем все потенциалы кроме одного, φ_j. Теплота Q теперь оказывается функцией одной переменной, φ_j. Раскрывая скобки в (6), видим, что Q является квадратным трёхчленом по φ_j: $Q = a\varphi_j^2 + b\varphi_j + c$. Коэффициенты a и b легко вычислить:

$$a = \sum \frac{1}{R_{ij}}, \quad b = -2\sum \frac{\varphi_i}{R_{ij}}. \tag{7}$$

Минимум квадратного трёхчлена Q легко найти, он достигается когда

$$a\varphi_j = -\frac{b}{2} \iff \sum \frac{\phi_j}{R_{ij}} - \sum \frac{\phi_i}{R_{ij}} = 0, \iff \sum \frac{(\varphi_i - \varphi_j)}{R_{ij}} = 0. \tag{8}$$

Разберём физический смысл последнего равенства. В числителе стоит напряжение на резисторе, в знаменателе — его сопротивление. Получившееся отношение — ток, втекающий (или вытекающий; это зависит от знака разности $\varphi_i - \varphi_j$) в данный узел j. Иными словами, потребовав минимальности теплопотерь Q, мы получили уравнения, говорящие, что сумма втекающих и вытекающих токов в каждый узел должна быть равна нулю.

Но это и есть правильные уравнения, описывающие электрическую цепь! Действительно, в узлах не скапливаются заряды, а значит, количества втекающих и вытекающих зарядов в единицу времени должны совпадать. Таким образом, мы доказали, что в реальной электрической цепи потенциалы в узлах (а, следовательно, и токи) распределены так, что теплопотери оказываются минимальными.

Легко проверить (это мы оставим в качестве упражнения), что минимальное значение теплоты $Q_{\min} = U^2/R$, где R — общее сопротивление электрической цепи между узлами 1 и n.

Теперь, наконец, мы готовы доказать теорему о монотонности. Пусть мы увеличили какое-то сопротивление в цепи, $R'_{ij} \geq R_{ij}$. Рассмотрим функции

$$Q = \sum \frac{(\varphi_i - \varphi_j)^2}{R_{ij}}, \quad Q' = \sum \frac{(\varphi_i - \varphi_j)^2}{R'_{ij}}. \tag{9}$$

Очевидно, что $Q' \leq Q$. Ясно, что то же самое неравенство справедливо и для минимальных значений

$$Q'_{\min} = \frac{U^2}{R'} \leq Q_{\min} = \frac{U^2}{R}. \tag{10}$$

Отсюда следует, что $R' \geq R$.

Точно таким же образом доказывается симметричное утверждение об уменьшении одного из сопротивлений цепи.

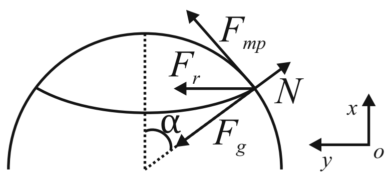
На этом доказательство теоремы Рэлея о монотонности закончено.

Задача 3.

По условию, радиус шара R, радиус траектории робота r, $R = rs$.

Рассмотрим силы, действующие на робота при движении по окружности. Сила гравитационного взаимодействия $F_g = GmM/R^2$ и сила реакции опоры N направлены по линии, соединяющей робота и центр шара. Результирующая всех сил, действующих на робота (обозначим ее F_k), должна быть направлена к центру окружности, по которой движется робот. Сумма F_g и N не может быть туда направлена. Это означает, что описанное в задаче движение возможно лишь при наличии силы трения $F_{\text{тр}}$ (см. рис. 4).

Рис. 4:



Угол α, характеризующий "широту" окружности, по которой движется робот, можно найти, зная, что $r = R\sin\alpha = R/s$, откуда $\sin\alpha = 1/s$, $\cos\alpha = \sqrt{s^2-1}/s$.

Запишем условие о том, что сумма сил F_g, N, $F_{\text{тр}}$ направлена в центр окружности, по которой движется робот, и равна $F_r = mV^2/r$ (обратите внимание, в качестве радиуса в формуле центростремительного ускорения берется радиус *траектории*, а не шара). В проекции на оси Ox и Oy это даст

$$Ox: \qquad F_{\text{тр}}\sin\alpha + N\cos\alpha = F_g\cos\alpha \tag{11}$$

$$Oy: \qquad F_g\sin\alpha + F_{\text{тр}}\cos\alpha - N\sin\alpha = \frac{mV^2}{r}. \tag{12}$$

Итак, движение по линии возможно, если колеса робота не проскальзывают, т.е. когда $F_{\text{тр}} < \mu N$. Критическое значение силы трения $F_{\text{тр}} = \mu N$ характеризует предельную ситуацию, когда силы трения только-только хватает на то, чтобы робота не снесло с нарисованной окружности. Подставляя это в ф-лу (11), выразим

$$N = \frac{F_g \cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha},$$

подставляя это N в (12) получим, с учетом $r = R\sin\alpha$ и $F_{\text{тр}} = \mu N$,

$$F_g \sin\alpha + \frac{F_g\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) = \frac{mV^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mu F_g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \frac{mV^2}{R\sin\alpha}$$

Подставляя сюда $F_g = GMm/R^2$ и выражая V, найдем критическое значение скорости робота, при котором силы трения еще "хватает" для требуемого движения:

$$\frac{GMm}{R^2}\frac{\mu}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \frac{mV^2}{R\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad V = \sqrt{\frac{GM\mu}{R(\sqrt{s^2-1}+\mu)}}. \tag{13}$$

Ответ: Робот сможет двигаться по линии с максимальной скоростью

$$V = \sqrt{\frac{GM\mu}{R(\sqrt{s^2-1}+\mu)}}.$$

Задача 4.

В начальный момент времени система находится в равновесии, поэтому воспользуемся "правилом рычага": с одной стороны от точки опоры находятся брус льда длиной x_0 массы $\rho a^2 x_0$ и эквилибрист массы m, с другой — брус льда неизвестной длины y_0 и массы $\rho a^2 y_0$. Для весомого рычага сила тяжести прикладывается к центру масс плеча:

$$m x_0 + \rho a^2 x_0 \frac{x_0}{2} = \rho a^2 y_0 \frac{y_0}{2}.$$

Найдем длину рычага со стороны клоуна в начальный момент времени:

$$y_0 = \sqrt{\frac{2mx_0 + \rho a^2 x_0^2}{\rho a^2}}.$$

В единицу времени Δt клоун передает льду теплоту $Q = P\Delta t$. Так как лёд находится при температуре 0^o C, все тепло идет на растапливание. По условию, поперечное сечение рычага всегда имеет форму квадрата со стороной a, что приводит к тому, что масса растаявшего льда в единицу времени Δt :$\Delta m = \rho a^2 \Delta y$, где Δy - расстояние, на которое укоротился рычаг. Запишем уравнение теплового баланса:

$$P\Delta t = \lambda\rho a^2 \Delta y.$$

Таким образом, длина рычага y в момент времени t запишется через следующее соотношение:

$$y(t) = y_0 - \frac{Pt}{\lambda\rho a^2}.$$

Будем отсчитывать координату эквилибриста x от его начального положения. Тогда искомая зависимость может быть найдена исходя из "правила рычага" для каждого момента времени:

$$mx + \rho a^2 \frac{x_0^2}{2} = \rho a^2 \frac{y^2}{2},$$

где y - длина рычага со стороны клоуна. Подставим все найденные ранее величины и окончательно получим Ответ:

$$x(t) = \frac{\rho a^2}{2m}\left(\sqrt{\frac{2mx_0 + \rho a^2 x_0^2}{\rho a^2}} - \frac{Pt}{\lambda \rho a^2}\right)^2 - \frac{\rho a^2 x_0^2}{2m}.$$

Задача 5.

На призмы, погруженные в жидкость, действует выталкивающая сила Архимеда. Она возникает из-за того, что давление жидкости с глубиной увеличивается, вследствие чего жидкость снизу давит на призмы сильнее, чем сверху. По условию призмы плавают, а значит силы Архимеда, действующие на них, уравновешиваются силами тяжести. Рассмотрим условия вертикального равновесия призм.

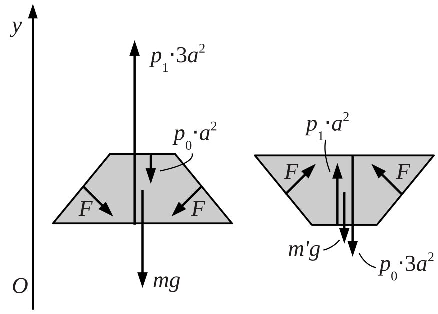


Рис. 5:

Обозначим давление жидкости на глубине h_0 (верхняя грань призм) через p_0, давление на глубине $h_0 + a$ (нижняя грань) — через p_1. Силы, действующие на призмы и имеющие вертикальные проекции, изображены на Рис.5. На этом рисунке сила F — суммарная сила давления жидкости на наклонную грань. Поскольку форма призм одинакова, и погружены они на одинаковую глубину, в обоих случаях сила F имеет одну и ту же величину. Это является следствием закона Паскаля.

Выпишем второй закон Ньютона для обеих призм в проекции она ось Oy:

$$p_1 \cdot 3a^2 - 2F_y - p_0 \cdot a^2 - mg = 0 \tag{14}$$

$$p_1 \cdot a^2 + 2F_y - p_0 \cdot 3a^2 - m'g = 0 \tag{15}$$

Складывая уравнения (14) и (15), получаем, что

$$4a^2 \frac{p_1 - p_0}{g} - m = m' \tag{16}$$

Таким образом, остается только определить перепад давления жидкости $p_1 - p_0$ при переходе от глубины h_0 к $h_0 + a$. Для этого разобьем отрезок от h_0 до $h_0 + a$ на N равных промежутков величиной $\Delta h = a/N$. Будем считать, что N достаточно большое. Тогда для любого из получившихся малых промежутков $[h_0 + (n-1)\Delta h, h_0 + n\Delta h]_{n=1..N}$ можно считать, что плотность не успевает заметно измениться на протяжении промежутка и равняется приблизительно $\rho(h_0 + n\Delta h)$. Следовательно, приращение давления на этом малом промежутке равно $\Delta p = \rho(h_0 + n\Delta h)g\Delta h$. Данное выражение можно понимать как умноженную на g площадь под графиком плотности на нашем малом интервале (при этом, чем меньше Δh, тем точнее данное соответствие). Тогда, просуммировав по всем N промежуткам, получаем, что искомый перепад давления равен умноженной на g площади под графиком плотности на интервале $[h_0, h_0 + a]$. Эту площадь обозначим через S.

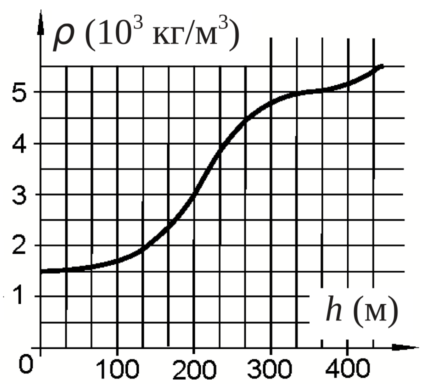


Рис. 6:

Приведенное выше рассуждение является стандартным, поэтому здесь опущены некоторые детали. Нечто похожее можно, например, встретить при изучении кинематики материальной точки, когда делается вывод, что площадь под графиком скорости есть перемещение тела (сравните, $\Delta x = v(t)\Delta t \Leftrightarrow \Delta p = g\rho(h)\Delta h$).

Окончательно, для массы второй призмы получаем

$$4a^2S - m = m' \qquad (17)$$

Площадь S легко можно найти, использовав Рис. 6.

В условие задачи, к несчастью, вкралась ошибка. Приведенное там значение массы первой призмы (25 мегатонн) является слишком большим: такая призма не сможет плавать на глубине h_0, она будет тонуть. Правильное значение для массы первой призмы можно получить, аккуратно рассчитав действующую на нее силу Архимеда.

Действительно, по закону Архимеда, масса плавающего тела равна массе вытесненной им жидкости. Чтобы найти массу вытесненной жидкости, вновь разделим интервал от h_0 до $h_0 + a$ на N равных промежутков величиной Δh. Можно считать, что на каждом малом интервале площадь сечения призмы не успевает значительно измениться и равняется

$$S(h_0 + n\Delta h) = a^2 + 2a(n\Delta h)$$

(для интервала $[h_0 + (n-1)\Delta h, h_0 + n\Delta h]$). Тогда масса жидкости, вытесненной соответствующим маленьким кусочком призмы, равна

$$\Delta m = \rho(h_n)S(h_n)\Delta h, \quad h_n = h_0 + n\Delta h.$$

Просуммировав по всем малым интервалам, получаем, что масса жидкости равняется площади под графиком функции $\rho(h)S(h)$, где $S(h)$ — площадь сечения призмы на глубине h. Численно посчитать данную площадь гораздо сложнее, чем просто оценить площадь под графиком плотности. Однако, если аккуратно проделать вычисления, то можно показать, что масса первой призмы должна равняться приблизительно 21,4 мегатонны. Естественно, что приведенные выше рассуждения можно в равной степени применить и ко второй призме, непосредственно получив ее массу.

Если использовать правильное значение массы первой призмы, то есть приблизительно 21,4 магатонны, и формулу (17), то масса второй призмы оказывается равной приблизительно

$$m' \approx 18,9\,\text{мегатонн}.$$

Еще раз отметим, что данный ответ можно также получить, посчитав площадь под графиком произведения плотности жидкости и площади сечения второй призмы.

Ежели использовать значение массы первой призмы, приведенное в условии, то масса второй призмы равна приблизительно

$$m' \approx 16\,\text{мегатонн}.$$

Ответ: Правильный ответ: приблизительно 18,9 магатонны. Ответ с учетом опечатки в условии: приблизительно 16 мегатонн.

Примечание:

Работы участников, получивших формулу (17) и использовавших в качестве массы первой призмы число, приведенное в условии, будут оцениваться из полного балла.

Работы участников, вычисливших силу Архимеда, действующую на вторую призму, и нашедших ее массу, будут оцениваться из полного балла.

Работы участников, аргументированно доказавших, что задача поставлена некорректно и что первая призма должна утонуть, будут оцениваться из полного балла.

Жюри приносит свои извинения за допущенную в условии неточность.