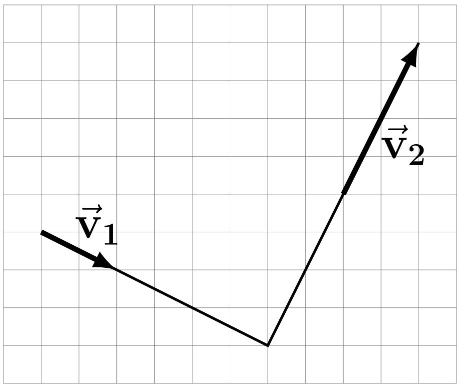
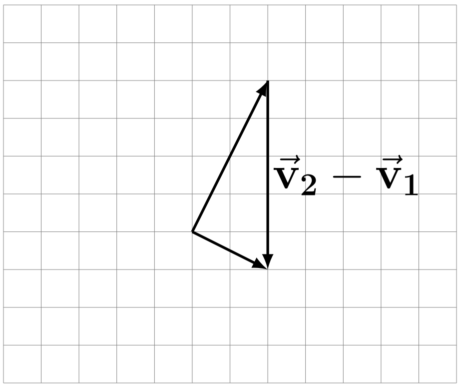
Возможные решения задач 9-го класса.

1. Задача 1

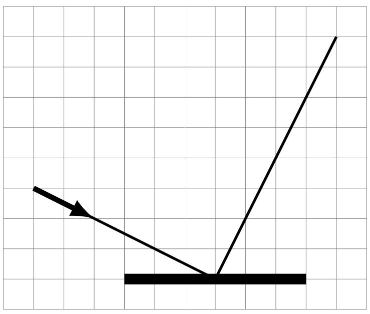
Заметим, что при отскоке шайба сохраняет компоненту скорости вдоль плоскости клюшки. Значит, изменение скорости шайбы перпендикулярно плоскости клюшки. Заметим, что от модуля скорости положение клюшки не зависит (это отвечает симметрии $t \mapsto kt$, то есть скорость течения времени в задаче не фиксирована). Поэтому достаточно решить задачу для одного выбранного значения начальной скорости.
Есть два случая направления полёта шайбы.
1. Слева-направо



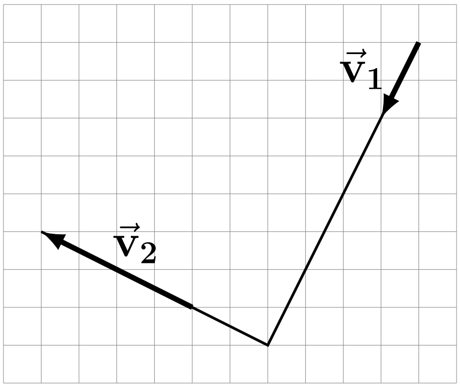
Разность этих скоростей



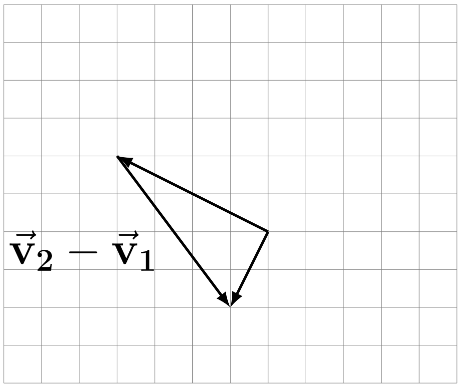
И тогда ответ в этом случае:



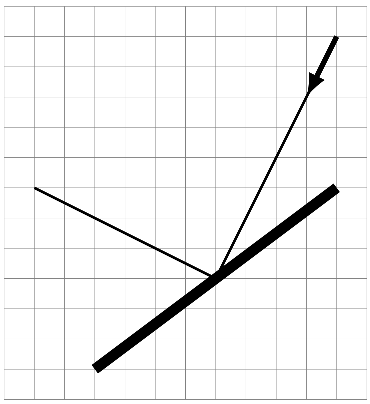
2. Справа-налево



Разность этих скоростей



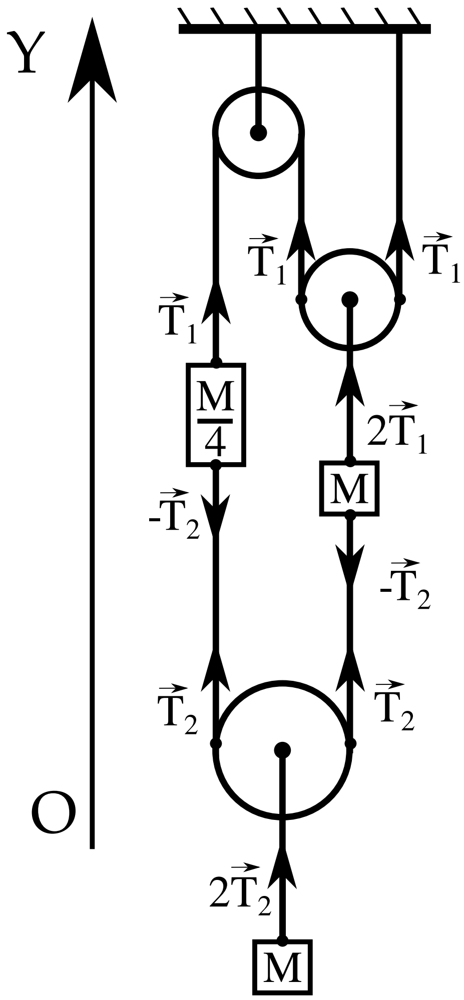
И тогда ответ в этом случае:



2. Задача 2

Так как нить не рвется и все время натянута, то перемещения блоков по вертикали связаны. Пусть верхний блок поднимется на Δx_1, а в то же время положение нижнего изменится на Δx_2. Тогда, чтобы нить была натянута и не рвалась, верхний груз должен подняться на $2\Delta x_1 + 2\Delta x_1$, с другой стороны вместе с верхним блоком он поднялся на Δx_1, откуда получаем соотношение

$$2\Delta x_1 + 2\Delta x_1 = \Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_1 = -2\Delta x_2. \tag{1}$$



Теперь запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось OY (см. рис.) для гусеницы, верхнего и нижнего блоков:

$$\begin{cases} \frac{M}{4}a_\Gamma = T_1 - T_2 - \frac{M}{4}g \\ Ma_1 = 2T_1 - T_2 - Mg \\ Ma_2 = 2T_2 - Mg \end{cases} \tag{2}$$

Сначала система была неподвижна и все ускорения равнялись нулю. Несложно проверить, что в этом случае все уравнения (2) выполняются и система находится в равновесии. Таким образом, чтобы продвинуться к потолку гусенице необходимо ползти с ускорением. Пускай, в какой-то момент времени, гусеница имеет вертикальное ускорение a_Γ, тогда, силы натяжения нити T_1 и T_2 отклонятся от равновесных значений на ΔT_1 и $\Delta T2$, соответственно. Принимая во внимание, что ускорения верхнего и нижнего грузов связаны так же как их перемещения ($a_1 = -2a_2$), второй закон Ньютона запишется так

$$\begin{cases} \frac{M}{4}a_\Gamma = \Delta T_1 - \Delta T_2 \\ -Ma_2 = 2\Delta T_1 - \Delta T_2 \\ Ma_2 = 2\Delta T_2 \end{cases} \tag{3}$$

Решая эту систему (3) находим связь ускорений грузов с ускорением гусеницы

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{5}a_\Gamma \\ a_2 = -\frac{1}{5}a_\Gamma \end{cases} \tag{4}$$

При том, что вначале система была неподвижна, а ускорения блоков и гусеницы связаны множителями, то скорости в каждый момент времени будут связаны так же, а значит и пройденные ими пути будут связаны теми же множителями. В результате верхний блок переместится на $l_1 = \frac{2}{5} l_\Gamma = 3{,}6$ см, а нижний на $l_2 = -\frac{1}{5} l_\Gamma = -1{,}8$ см

Ответ: Верхний блок поднимется на 3,6 см, а нижний опустится на 1,8 см

3. Задача 3

Очевидно, что конструкция развалится, если силы, действующие на одну из прищепок, не будут компенсированы. Из симметрии конструкции понятно, что для каждой прищепки силы, приложенные к разным плечам, в проекции на OY скомпенсированы. Таким образом далее нас интересуют только проекции сил на ось OX.

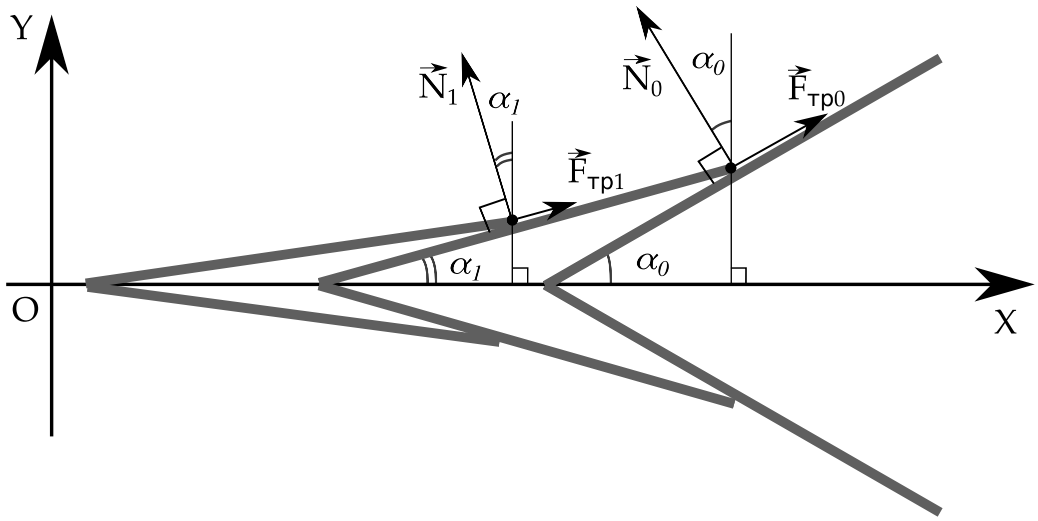
Для начала рассмотрим силы, действующие на самую левую прищепку. С внешней стороны на каждое ее плечо действуют только сила реакции опоры $\overrightarrow{N}_1$ и сила трения $\overrightarrow{F}_{TP1}$ (см. рис.). Сила реакции опоры направлена перпендикулярно плечу зажимаемой прищепки, а сила трения — вдоль него. Проекции сил на ось OX должны компенсировать друг друга, проекции легко найти исходя из направления сил (см. рис.)

$$OX: \; N_1 \sin(\alpha_1) = F_{TP1} \sin(90^o - \alpha_1),$$

откуда, зная, что $F_{TP1} \leqslant \mu N_1$ находим условие на коэффициент трения

$$N_1 \sin(\alpha_1) \leqslant \mu N_1 \sin(90^o - \alpha_1) \Rightarrow \mu \geqslant tg(\alpha_1), \tag{5}$$

Заменим, что результирующая сил, действующих на каждое плечо направлена вертикально. То есть, по оси OX на левую прищепку со стороны средней силы не действуют. Это значит, что сила со стороны левой прищепки на среднюю не имеет компоненты вдоль оси OX.



Для средней прищепки вдоль оси OX имеют проекции только приложенные к ней сила реакции опоры $\overrightarrow{N}_0$ и сила трения $\overrightarrow{F}_{TP0}$, проекции которых находятся аналогичным образом (см. рис.)

$$OX: \; N_0 \sin(\alpha_0) = F_{TP0} \sin(90^o - \alpha_0),$$

откуда, так же получаем условие на коэффициент трения

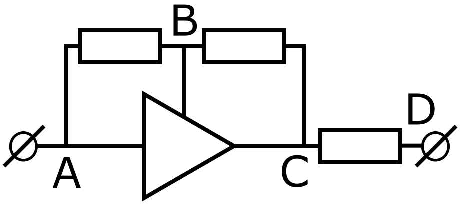
$$N_0 \sin(\alpha_0) \leqslant \mu N_0 \sin(90^o - \alpha_0) \Rightarrow \mu \geqslant tg(\alpha_0), \tag{6}$$

Очевидно, что $\alpha_0 > \alpha_1$, а значит и $tg(\alpha_0) > tg(\alpha_1)$. Тогда более строгим условием из (5) и (6) будет второе. Из условия задачи следует, что $\alpha_0 = 30^o$, откуда

$$\mu \geqslant tg(30^o) = 1/\sqrt{3} \cong 0.58.$$

Ответ: $\mu \geqslant 1/\sqrt{3} \cong 0.58$

4. Задача 4



В первую очередь заметим, что по контакту B ток не потечет. Это непосредственно следует из условия задачи, так как весь ток втекающий по контакту A вытекает по контакту C. Более строго можно сказать, что сумма всех втекающих токов должна быть равна нулю (вытекающие берутся со знаком минус), откуда следует тот же вывод.
Таким образом, ток через резистор AB равен току через резистор BC, исходя из закона сохранения тока в узле B. Так как сопротивления резисторов также равны, по закону Ома будут равны и напряжения на резисторах, т.е. $U_{AB} = U_{BC} = U_{AC}/2$. Далее можно воспользоваться условием задачи и записать ток I_A, который пойдет через элемент, то есть будет втекать по контакту A и вытекать по контакту C:

$$I_A = \frac{U_{AC}^2}{2U_0 R_0} \ . \tag{7}$$

Через резистор CD пойдет ток I_{CD} равный сумме тока I_A проходящего через трехполюсник и тока I_{BC} через резистор BC, что следует из закона сохранения токов в узле C. Остается выразить ток через резистор BC, через выбранные переменные.
Отметим что сумма напряжений между точками AC и CD даст нам полное напряжение на схеме AD, то есть U_0. Напряжение и ток на резисторе CD равны тогда:

$$U_{CD} = U_0 - U_{AC} \ ; \ I_{CD} = \frac{U_0 - U_{AC}}{R_0} \ . \tag{8}$$

Учитывая закон сохранения токов в узле C, $ICD = I_A + I_{BC}$ легко записать итоговое уравнение:

$$\frac{U_0 - U_{AC}}{R_0} = \frac{U_{AC}^2}{2U_0 R_0} + \frac{U_{AC}}{2R_0} \ . \tag{9}$$

Это квадратное уравнение относительно U_{AC}. Его решением будет:

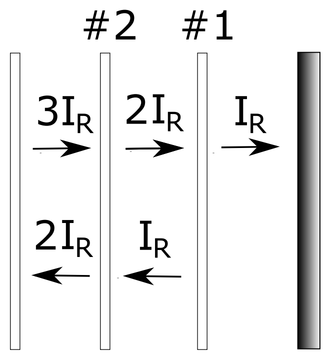
$$U_{AC} = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} = U_0 \ . \tag{10}$$

после чего можно без труда найти ток протекающий по схеме, который равен I_{CD} и, исходя из (8) равен:

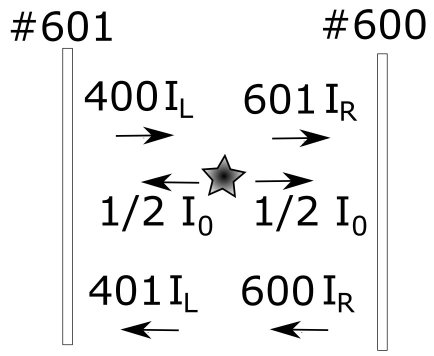
$$I_{CD} = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \frac{U_0}{R_0} \approx 0.44 \frac{U_0}{R_0} \ , \tag{11}$$

что и является ответом к задаче.
Это лишь одно из возможных решений. В качестве неизвестной переменной возможно выбрать и другие величины: напряжение U_{CD}, ток I_{CD}, ток I_{BC} и другие. При этом используя те же принципы, так же получится квадратное уравнение на выбранную неизвестную величину.

5. Задача 5



Обозначим поток энергии падающий на правый экран, как I_R. Тогда на первое зеркало перед экраном (ближайшее к нему) должен падать поток $2I_R$, так как пройдет только половина. Налево от первого зеркала отразится поток I_R. Поток направо $2I_R$ между первым и вторым зеркалом, в свою очередь, складывается из потока $I_R/2$ отраженного вторым зеркалом и потока $3I_R/2$ прошедшего через второе зеркало направо. Отсюда следует, что на второе зеркало слева падает поток $3I_R$, как показано на рисунке. Продолжая последовательность рассуждений легко показать, что на зеркало номер 600 от правого экрана, ближайшее к источнику света, слева падает поток $601I_R$, а отражается поток $600I_R$. Аналогичные рассуждения можно применить и к левой от источника части конструкции.



Если мы обозначим поток энергии от источника как I_0, то легко заметить, что поток $600I_R$, идущий влево переходит в $401I_L$ с добавлением половины потока от источника $I_0/2$. То же можно сказать и для потока идущего мимо источника направо. Запишем систему уравнений:

$$401I_L = 600I_R + I_0/2 \tag{12}$$

$$601I_R = 400I_L + I_0/2\ . \tag{13}$$

Решая систему, можно найти $I_R = 801/2002I_0$, то есть на правый экран падает приблизительно 4/10 энергии, испускаемой светодиодом.